

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Ordinaria 2025

Matemáticas II

Serie 1

Baremo e instrucciones

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se planteen. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. La redacción de la respuesta debe hacerse de manera coherente, con corrección y claridad, empleando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de manera clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

Idea clave

Este examen (Catalunya, 2025, Serie 1) exige elegir una única opción en el ejercicio 4. Aquí resolvemos también las dos opciones (A y B), como recurso de repaso completo.

EJERCICIO 1: Función racional: cortes con los ejes, asíntotas y rectas tangentes (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considere la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}.$$

a (1 punto) Determine los cortes de la curva $y = f(x)$ con los ejes de coordenadas, y las ecuaciones de sus posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

b (1 punto) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = 2$. ¿Son estas dos rectas paralelas? Justifique la respuesta.

c (0,5 puntos) ¿Hay algún punto donde la recta tangente a $f(x)$ tenga pendiente 1? En caso afirmativo, encuéntralo.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Antes de estudiar las asíntotas conviene simplificar $f(x)$ mediante división polinómica: al ser el grado del numerador exactamente una unidad mayor que el del denominador, este cociente revela directamente la asíntota oblicua.

Cortes con los ejes. Con el eje OY ($x = 0$): $f(0) = \frac{0-0}{0-1} = 0$, punto $(0, 0)$.

Con el eje OX ($f(x) = 0$): el numerador debe anularse (y el denominador no), $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 2$ (ninguno anula el denominador). Puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

Asíntota vertical. El denominador se anula en $x = 1$; el numerador en $x = 1$ vale $1 - 2 = -1 \neq 0$, así que $x = 1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal y oblicua. Dividimos $x^2 - 2x$ entre $x - 1$:

$$x^2 - 2x = (x - 1)(x - 1) - 1 \Rightarrow f(x) = x - 1 - \frac{1}{x - 1}.$$

Como el término $-\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, no hay asíntota horizontal (el grado del numerador supera al del denominador), pero sí asíntota oblicua:

$$y = x - 1.$$

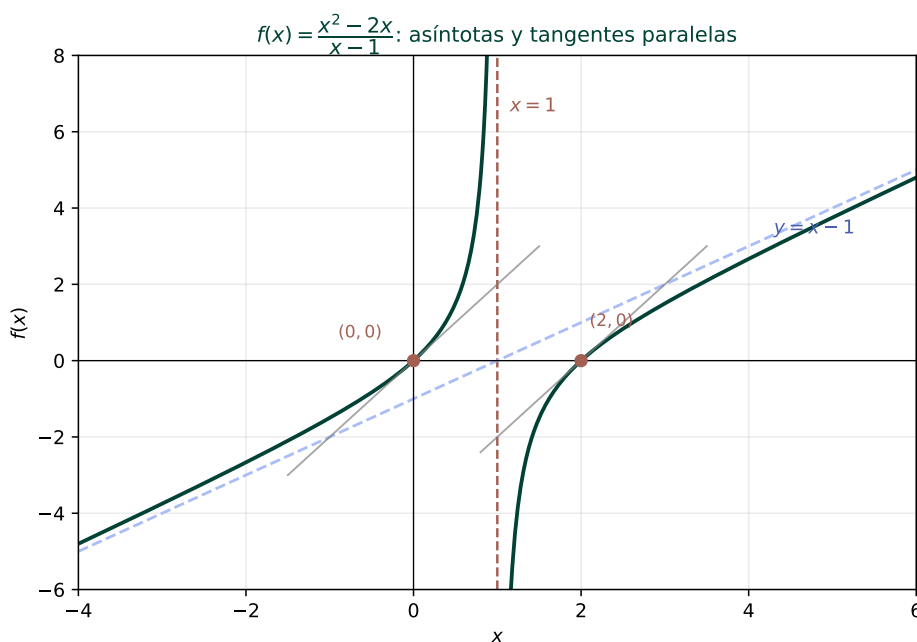


Figura 1: $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$, con la asíntota vertical $x = 1$, la oblicua $y = x - 1$ y las dos rectas tangentes paralelas de los apartados b) y c).

Apartado b)

Idea clave

Con $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x-1}$ escrita así, derivar es inmediato: la derivada de $-\frac{1}{x-1} = -(x-1)^{-1}$ es $(x-1)^{-2}$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En $x = 0$: $f(0) = 0 - 1 - \frac{1}{-1} = -1 + 1 = 0$, y $f'(0) = 1 + \frac{1}{(-1)^2} = 1 + 1 = 2$.

En $x = 2$: $f(2) = 2 - 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0$, y $f'(2) = 1 + \frac{1}{1^2} = 1 + 1 = 2$.

Las rectas tangentes son:

$$\text{En } x = 0 : \quad y - 0 = 2(x - 0) \implies \boxed{y = 2x.}$$

$$\text{En } x = 2 : \quad y - 0 = 2(x - 2) \implies \boxed{y = 2x - 4.}$$

Idea clave

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente, aunque corten al eje OY en puntos distintos (si además coincidiera la ordenada en el origen, serían la misma recta, no solo paralelas).

Ambas rectas tienen pendiente 2, así que **sí son paralelas**. Además son distintas (una pasa por el origen y la otra no), así que son paralelas y no coincidentes.

Apartado c)

Idea clave

Buscamos x tal que $f'(x) = 1$. Con la expresión $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2}$ ya obtenida, esta ecuación se puede analizar sin resolver nada todavía: el segundo sumando es siempre positivo.

Para que $f'(x) = 1$ haría falta que $\frac{1}{(x-1)^2} = 0$, pero $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$ para todo $x \neq 1$ (nunca puede ser cero, ya que es un cociente con numerador 1). Por tanto:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-1)^2} > 1 \quad \text{para todo } x \text{ del dominio.}$$

No existe ningún punto donde la recta tangente tenga pendiente 1: $f'(x)$ es siempre mayor que 1.

EJERCICIO 2: Sistema de ecuaciones lineales con parámetro (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} y - z = p + 3 \\ p^2 x - z = 5 \\ x - y = 3 \end{array} \right\}.$$

a (1,25 puntos) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p .

b (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el caso $p = -1$.

c (0,75 puntos) Para el caso $p = -1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy = 10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntruelas todas.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

El sistema no viene dado en el orden habitual x, y, z : conviene reescribir cada ecuación completando con coeficiente 0 las variables que no aparecen, para poder construir correctamente la matriz de coeficientes.

Reescribimos el sistema en la forma estándar:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x + y - z = p + 3 \\ p^2 x + 0y - z = 5 \\ x - y + 0z = 3 \end{array} \right.$$

La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$|M| = 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} p^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} p^2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Calculamos los determinantes 2×2 necesarios:

$$\begin{vmatrix} p^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1, \quad \begin{vmatrix} p^2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -p^2 - 0 = -p^2.$$

Sustituyendo:

$$|M| = 0 - 1(1) + (-1)(-p^2) = -1 + p^2 = p^2 - 1.$$

Factorizando: $|M| = (p - 1)(p + 1)$, que se anula en $p = 1$ y $p = -1$.

Idea clave

Como es un sistema cuadrado (3 ecuaciones, 3 incógnitas), el determinante permite resolver de inmediato el caso general; solo hace falta estudiar por separado los dos valores que lo anulan.

Caso $p \neq 1$ y $p \neq -1$: $|M| \neq 0$, luego $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 3 = n$. Sistema compatible determinado (SCD).

Caso $p = 1$: el sistema queda

$$\begin{cases} y - z = 4 \\ x - z = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

con matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. El menor de filas 1,2 y columnas 2,3, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,

da $\text{rg}(M) = 2$. Sumando la primera y la tercera ecuación: $(y - z) + (x - y) = 4 + 3 \Rightarrow x - z = 7$, que contradice la segunda ecuación ($x - z = 5$). Esta contradicción confirma que $\text{rg}(M') = 3 \neq \text{rg}(M) = 2$: **sistema incompatible (SI)**.

Caso $p = -1$: el sistema queda

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

con la misma matriz de coeficientes que en el caso $p = 1$ (ya que $p^2 = 1$ en ambos casos), así que de nuevo $\text{rg}(M) = 2$. Pero ahora sumando la primera y la tercera ecuación: $(y - z) + (x - y) = 2 + 3 \Rightarrow x - z = 5$, que **sí coincide** con la segunda ecuación: no hay contradicción, la tercera ecuación es combinación de las otras dos. Por tanto $\text{rg}(M') = 2 = \text{rg}(M) < 3$: **sistema compatible indeterminado (SCI)**.

Resumen:

p	Tipo de sistema
$p \neq \pm 1$	SCD
$p = 1$	SI
$p = -1$	SCI

Apartado b)

Para $p = -1$, el sistema es

$$\begin{cases} y - z = 2 \\ x - z = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Idea clave

Como ya vimos en el apartado a) que la tercera ecuación es combinación de las otras dos, basta trabajar con las dos primeras y dejar z como parámetro libre.

De la primera ecuación: $y = z + 2$. De la segunda: $x = z + 5$. Tomando $z = \lambda$ como parámetro:

$$(x, y, z) = (\lambda + 5, \lambda + 2, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Apartado c)

Idea clave

Sustituimos la solución paramétrica en la condición $xy = 10$: se obtiene una ecuación de segundo grado en λ , con hasta dos soluciones posibles.

Imponemos $xy = 10$ con $x = \lambda + 5$, $y = \lambda + 2$:

$$(\lambda + 5)(\lambda + 2) = 10 \implies \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 10 \implies \lambda^2 + 7\lambda = 0 \implies \lambda(\lambda + 7) = 0.$$

Las soluciones son $\lambda = 0$ y $\lambda = -7$.

Para $\lambda = 0$: $(x, y, z) = (5, 2, 0)$. Comprobación: $xy = 5 \cdot 2 = 10$ ✓.

Para $\lambda = -7$: $(x, y, z) = (-2, -5, -7)$. Comprobación: $xy = (-2)(-5) = 10$ ✓.

Sí, hay exactamente dos soluciones: $(5, 2, 0)$ y $(-2, -5, -7)$.

EJERCICIO 3: Probabilidad: control de calidad y binomial (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Una empresa produce dos tipos de piezas, de hierro y de acero. El 60 % de la producción total corresponde a piezas de hierro y el resto son de acero. Sabemos que el 95 % de las piezas de hierro producidas no tienen ningún defecto, mientras que el 3 % de las piezas de acero son defectuosas.

a (0,75 puntos) Si cogemos una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

b (0,75 puntos) La empresa pronto diversificará la producción y empezará a producir también piezas de titanio, que se venderán en paquetes de 5. Si la probabilidad de que una pieza de titanio sea defectuosa es un valor desconocido p , y cada pieza es defectuosa independientemente de las demás, compruebe que la expresión que nos da la probabilidad de que en un paquete de 5 piezas haya exactamente 4 defectuosas (en función de p) es $f(p) = 5(p^4 - p^5)$.

c (1 punto) Considere la función $f(p)$ del apartado anterior. Determine el valor máximo que toma $f(p)$ cuando $p \geq 0$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Cuando el enunciado da un porcentaje de piezas *sin* defecto, primero hay que pasarlo a probabilidad de defecto (complementario) antes de aplicar la probabilidad total.

Sean H = "la pieza es de hierro" Ac = "la pieza es de acero", con $P(H) = 0,60$ y $P(Ac) = 0,40$.

Como el 95 % de las piezas de hierro no tienen defecto, la probabilidad de que una pieza de hierro sea defectuosa es el complementario: $P(D | H) = 1 - 0,95 = 0,05$. Para el acero, directamente $P(D | Ac) = 0,03$.

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(H) \cdot P(D | H) + P(Ac) \cdot P(D | Ac) = 0,60 \cdot 0,05 + 0,40 \cdot 0,03 = 0,03 + 0,012 = 0,042.$$

$$P(\text{defectuosa}) = 0,042 = \frac{21}{500} = 4,2 \%$$

Apartado b)

Idea clave

.Exactamente 4 de 5 defectuosas, con piezas independientes.^{es} la situación típica de una variable binomial: hay que elegir cuáles 4 posiciones (de las 5) son las defectuosas, y multiplicar por la probabilidad de ese patrón concreto de éxitos y fracasos.

Sea X el número de piezas defectuosas en un paquete de 5, con $X \sim B(5, p)$ (cada pieza es defectuosa con probabilidad p , independientemente de las demás). La probabilidad de exactamente 4 defectuosas es:

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} p^4 (1-p)^{5-4} = \binom{5}{4} p^4 (1-p).$$

Como $\binom{5}{4} = 5$:

$$P(X = 4) = 5 p^4 (1-p) = 5(p^4 - p^5) = f(p),$$

que es precisamente la expresión que había que comprobar. ■

Apartado c)**Idea clave**

Aunque p representa una probabilidad (y por tanto en la práctica $0 \leq p \leq 1$), el enunciado solo pide estudiar $f(p)$ para $p \geq 0$: buscamos los puntos críticos de f y comparamos sus valores, sin asumir de entrada dónde está el máximo.

Derivamos $f(p) = 5p^4 - 5p^5$:

$$f'(p) = 20p^3 - 25p^4 = 5p^3(4 - 5p).$$

Igualando a cero: $p = 0$ (raíz triple) o $p = \frac{4}{5}$.

Idea clave

En vez de recurrir a la derivada segunda (que en $p = 0$ resulta poco concluyente, al ser una raíz múltiple), es más directo estudiar el signo de $f'(p) = 5p^3(4 - 5p)$ directamente: para $p > 0$ pequeño, $p^3 > 0$ y $(4 - 5p) > 0$, así que $f'(p) > 0$.

Para $0 < p < \frac{4}{5}$: $p^3 > 0$ y $4 - 5p > 0$, luego $f'(p) > 0$ (f creciente).

Para $p > \frac{4}{5}$: $p^3 > 0$ pero $4 - 5p < 0$, luego $f'(p) < 0$ (f decreciente).

Por tanto f crece en $\left(0, \frac{4}{5}\right)$ y decrece en $\left(\frac{4}{5}, +\infty\right)$: hay un **máximo relativo (y global, para $p \geq 0$)** en $p = \frac{4}{5}$, ya que $f(0) = 0$ es un mínimo local (extremo del tramo creciente) y $f(p) \rightarrow -\infty$ cuando $p \rightarrow +\infty$.

Calculamos el valor máximo:

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 5\left(\frac{4}{5}\right)^4 - 5\left(\frac{4}{5}\right)^5 = 5\left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{5}\right) = 5 \cdot \frac{256}{625} \cdot \frac{1}{5} = \frac{256}{625}.$$

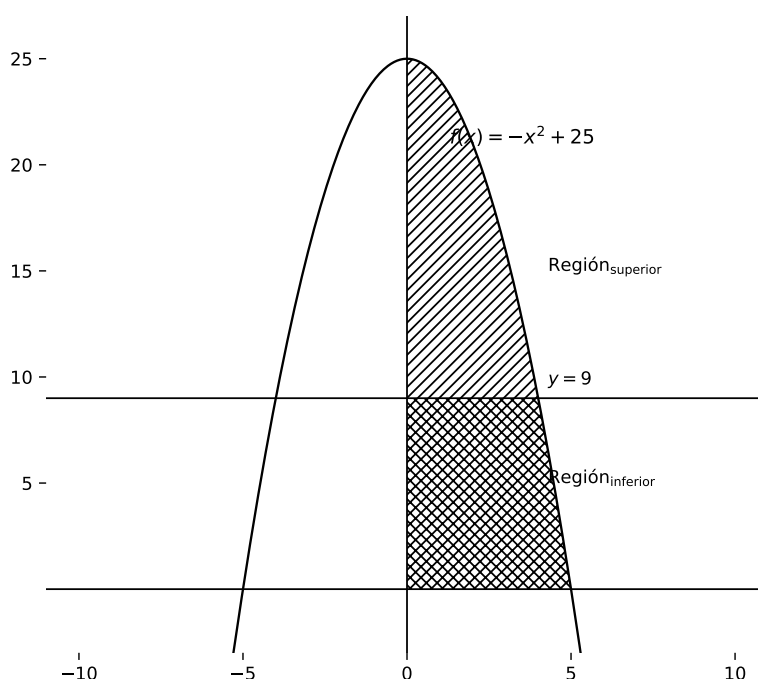
$$f_{\text{máx}} = f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{256}{625} = 0,4096.$$

EJERCICIO 4: Escoja UNA de las dos opciones (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Opción A

La vela mayor de un velero tiene forma semiparabólica y está delimitada por las gráficas de $f(x) = -x^2 + 25$, $y = 0$ y $x = 0$, tal como se indica en la siguiente figura:



La vela tiene dos partes separadas por la recta $y = 9$. Para construirla, se emplea un tejido de nailon en la parte superior, que cuesta 50 €/u^2 , y un tejido de poliéster en la parte inferior, que cuesta 70 €/u^2 . Calcule el coste total del material que se necesita para construir esta vela.

Opción B

Considere el plano π de ecuación $x + y = 0$.

a (1 punto) Calcule la ecuación del plano π' que es perpendicular a π y contiene los puntos $P = (1, -1, 2)$ y $Q = (3, -3, 6)$.

b (1,5 puntos) Calcule la ecuación paramétrica de la recta contenida en π' y que contiene los puntos de π' a la misma distancia de P que de Q .

SOLUCIÓN

Resolvemos primero la Opción A.

Idea clave

Antes de integrar, localizamos los puntos clave: dónde la parábola corta al eje OX (límite derecho de la vela) y dónde corta a la recta $y = 9$ (frontera entre las dos regiones).

La parábola $f(x) = -x^2 + 25$ corta al eje OX en $-x^2 + 25 = 0 \Rightarrow x = \pm 5$; como la vela está delimitada también por $x = 0$, el dominio relevante es $x \in [0, 5]$.

Corte con $y = 9$: $-x^2 + 25 = 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$; el valor relevante en $[0, 5]$ es $x = 4$.

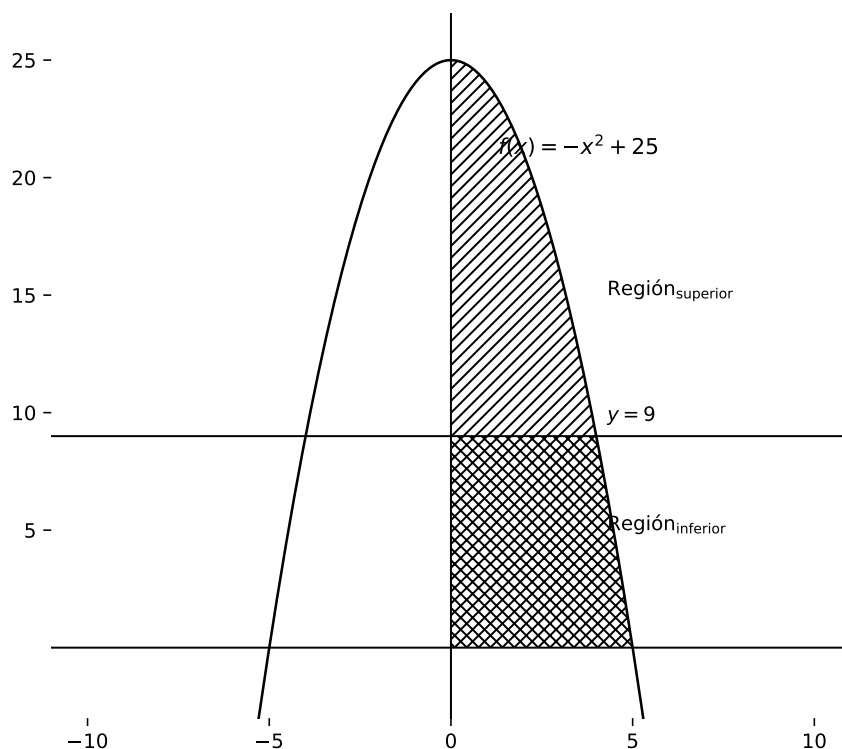


Figura 2: Vela semiparabólica $f(x) = -x^2 + 25$, dividida por $y = 9$ en región superior (nailon) y región inferior (poliéster).

Idea clave

La región superior es la parte de la vela que queda *por encima* de la recta $y = 9$: para $x \in [0, 4]$, la altura de esa franja es $f(x) - 9$ (la distancia entre la curva y la recta). La región inferior es todo lo que queda por debajo de $y = 9$: un rectángulo de altura 9 para $x \in [0, 4]$, más la parte de la curva que ya está por debajo de $y = 9$ para $x \in [4, 5]$.

Región superior ($x \in [0, 4]$, entre la curva y la recta $y = 9$):

$$A_{\text{sup}} = \int_0^4 [(-x^2 + 25) - 9] dx = \int_0^4 (-x^2 + 16) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 16x \right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 64 = \frac{128}{3}.$$

Región inferior: el rectángulo de altura 9 en $[0, 4]$, más el área bajo la curva en $[4, 5]$ (donde ya $f(x) \leq 9$):

$$A_{\text{inf}} = \underbrace{9 \cdot 4}_{\text{rectángulo}} + \int_4^5 (-x^2 + 25) dx = 36 + \left[-\frac{x^3}{3} + 25x \right]_4^5.$$

Calculamos la integral: en $x = 5$, $-\frac{125}{3} + 125 = \frac{250}{3}$; en $x = 4$, $-\frac{64}{3} + 100 = \frac{236}{3}$. La diferencia es $\frac{250}{3} - \frac{236}{3} = \frac{14}{3}$.

$$A_{\text{inf}} = 36 + \frac{14}{3} = \frac{108}{3} + \frac{14}{3} = \frac{122}{3}.$$

Idea clave

Como comprobación rápida, $A_{\text{sup}} + A_{\text{inf}}$ debe coincidir con el área total bajo la parábola en $[0, 5]$: en efecto, $\int_0^5 (-x^2 + 25) dx = \frac{250}{3} = \frac{128}{3} + \frac{122}{3}$.

El coste total es:

$$\text{Coste} = 50 \cdot A_{\text{sup}} + 70 \cdot A_{\text{inf}} = 50 \cdot \frac{128}{3} + 70 \cdot \frac{122}{3} = \frac{6400 + 8540}{3} = \frac{14940}{3} = 4980.$$

Coste total = 4980 €.

Resolvemos ahora la Opción B.

Con $P = (1, -1, 2)$ y $Q = (3, -3, 6)$:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, -2, 4).$$

El plano π tiene normal $\vec{n}_\pi = (1, 1, 0)$.

Apartado a)

Idea clave

El plano π' debe contener la recta PQ (por tanto, contener el vector $\overrightarrow{PQ}$) y ser perpendicular a π (por tanto, su normal debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi$). El producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\pi$ da exactamente un vector perpendicular a ambos, que es el normal buscado para π' .

$$\vec{n}_{\pi'} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ((-2)(0) - 4(1), 4(1) - 2(0), 2(1) - (-2)(1)) = (-4, 4, 4).$$

Simplificando (dividiendo por -4): $\vec{n}_{\pi'} = (1, -1, -1)$.

El plano que pasa por $P(1, -1, 2)$ con esta normal es:

$$1(x - 1) - 1(y + 1) - 1(z - 2) = 0 \implies x - 1 - y - 1 - z + 2 = 0 \implies \boxed{x - y - z = 0}.$$

Comprobamos que π' es perpendicular a π : $\vec{n}_{\pi'} \cdot \vec{n}_\pi = (1)(1) + (-1)(1) + (-1)(0) = 1 - 1 + 0 = 0 \quad \square$.

Comprobamos que $Q(3, -3, 6)$ pertenece a π' : $3 - (-3) - 6 = 3 + 3 - 6 = 0 \quad \square$.

Apartado b)

Idea clave

El conjunto de puntos equidistantes de P y Q es, por definición, el plano mediador del segmento PQ : el plano perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ que pasa por su punto medio. La recta pedida es la intersección de ese plano mediador con π' .

Punto medio de PQ : $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (2, -2, 4)$.

El plano mediador tiene como normal la propia dirección $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 4)$ y pasa por $M(2, -2, 4)$:

$$2(x-2) - 2(y+2) + 4(z-4) = 0 \implies 2x - 4 - 2y - 4 + 4z - 16 = 0 \implies 2x - 2y + 4z - 24 = 0,$$

que, dividiendo por 2, queda $x - y + 2z - 12 = 0$.

La recta buscada es la intersección de $\pi' : x - y - z = 0$ con el plano mediador $x - y + 2z - 12 = 0$:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

Idea clave

Restando estas dos ecuaciones se elimina $x - y$ de golpe, y queda una ecuación solo en z : eso fija el valor de z para toda la recta, dejando $x - y$ determinado también, con una única variable libre.

Restando la primera ecuación de la segunda: $(x - y + 2z - 12) - (x - y - z) = 3z - 12 = 0 \implies z = 4$.

Sustituyendo en la primera ecuación: $x - y - 4 = 0 \implies x - y = 4$.

Tomando $y = t$ como parámetro libre: $x = t + 4, z = 4$.

$$(x, y, z) = (4 + t, t, 4), \quad t \in \mathbb{R}.$$