

Prueba de Acceso a la Universidad
Comunidad Valenciana -- Extraordinaria 2026
Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Cada pregunta puntúa hasta 2,5 puntos. La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán 0,10 puntos hasta un máximo de un punto.

Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Rafa y Roger son dos tenistas que se han enfrentado a lo largo de sus carreras profesionales en tres tipos de superficies: hierba, tierra batida y pista dura. El 10 % de los partidos se jugaron en hierba y el 40 % en tierra batida. Por otra parte, Rafa ganó el 25 % de los partidos jugados en hierba, mientras que Roger ganó el 12.5 % de los jugados en tierra batida y el 55 % en pista dura. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Entre todos sus enfrentamientos, ¿cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado Roger?

1.2 (0.75 puntos) Si un partido fue ganado por Rafa, ¿cuál es la probabilidad de que se jugara en pista dura?

1.3 (1 punto) Si tomamos una muestra de 10 partidos jugados en pista dura, ¿cuál es la probabilidad de que Roger haya ganado 5 o 6 partidos?

SOLUCIÓN

Denotamos H , T , P los sucesos «el partido se jugó en hierba / tierra batida / pista dura», con $P(H) = 0.10$ y $P(T) = 0.40$. Como estas tres superficies son las únicas posibles, $P(P) = 1 - 0.10 - 0.40 = 0.50$.

Idea clave

El enunciado solo da directamente los porcentajes de hierba y tierra batida; el de pista dura se obtiene por complementario, ya que las tres superficies agotan todos los casos.

Denotamos R = «gana Roger». Como en tenis no hay empates, en cada superficie $P(R | \cdot) = 1 - P(\text{Rafa} | \cdot)$. Los datos dan directamente:

$$P(R | H) = 1 - 0.25 = 0.75, \quad P(R | T) = 0.125, \quad P(R | P) = 0.55.$$

1.1 (0.75 puntos)

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(H)P(R | H) + P(T)P(R | T) + P(P)P(R | P) = 0.10(0.75) + 0.40(0.125) + 0.50(0.55).$$

$$P(R) = 0.075 + 0.05 + 0.275 = 0.40.$$

Roger ha ganado el 40 % de los enfrentamientos.

1.2 (0.75 puntos)

Necesitamos $P(P | \text{Rafa gana})$. Primero, $P(\text{Rafa gana}) = 1 - P(R) = 0.60$, y $P(\text{Rafa} | P) = 1 - 0.55 = 0.45$. Por Bayes:

$$P(P | \text{Rafa}) = \frac{P(P) \cdot P(\text{Rafa} | P)}{P(\text{Rafa})} = \frac{0.50 \cdot 0.45}{0.60} = \frac{0.225}{0.60} = 0.375.$$

La probabilidad pedida es 0.375 (un 37.5 %).

1.3 (1 punto)

Sea X = número de partidos que gana Roger en pista dura, de 10 jugados; $X \sim B(10, 0.55)$. Buscamos $P(X = 5) + P(X = 6)$.

Idea clave

La tabla de la distribución binomial adjunta no tiene columna para $p = 0.55$. Como en cada partido de pista dura solo gana Roger o Rafa (sin empates), si Y es el número de partidos que gana *Rafa* en esos 10, entonces $Y = 10 - X$ y $Y \sim B(10, 0.45)$, que sí está en la tabla. Además, $X = 5 \Leftrightarrow Y = 5$ y $X = 6 \Leftrightarrow Y = 4$.

Por tanto:

$$P(X = 5) + P(X = 6) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = F_Y(5) - F_Y(3),$$

donde F_Y es la función de distribución de $Y \sim B(10, 0.45)$. Leyendo la tabla (fila $n = 10$, columna $p = 0.45$):

$$F_Y(5) = 0.7384, \quad F_Y(3) = 0.2660 \implies P(X = 5) + P(X = 6) = 0.7384 - 0.2660 = 0.4724.$$

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2.5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

Opción 2.1

ENUNCIADO

Mediante un proceso de mezclado continuo en tres tanques interconectados, una planta química produce tres compuestos, X , Y , Z , ligados a unos valores reales x , y , z , respectivamente, llamados pseudodensidades. Las pseudodensidades en los tanques deben estar en equilibrio para mantener la concentración

deseada de los productos. Los ingenieros del proceso han establecido las siguientes condiciones de equilibrio:

- **Tanque 1:** La suma de la pseudodensidad x , más el triple de la pseudodensidad y , más la pseudodensidad z ha de valer 5.
- **Tanque 2:** La suma de α veces la pseudodensidad x , más el doble de la pseudodensidad z , debe anularse, donde α es el factor catalizador.
- **Tanque 3:** La pseudodensidad z ha de ser α veces la pseudodensidad y .

Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) Estudiar la existencia y el número de soluciones x, y, z (las posibles configuraciones de equilibrio) en función de los valores del factor catalizador α .

2.1.2 (1.25 puntos) Cuando el factor catalizador satisface $\alpha \neq -1$, el proceso alcanza estados de equilibrio factibles. En este caso, calcular, si existen, los valores x, y, z , en función del valor α .

SOLUCIÓN

Traducimos las tres condiciones a ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 & (\text{Tanque 1}) \\ \alpha x + 2z = 0 & (\text{Tanque 2}) \\ \alpha y - z = 0 & (\text{Tanque 3, ya que } z = \alpha y) \end{cases}$$

2.1.1 (1.25 puntos)

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante:

$$|M| = 1(0 \cdot (-1) - 2\alpha) - 3(\alpha \cdot (-1) - 0) + 1(\alpha^2 - 0) = -2\alpha + 3\alpha + \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + 1).$$

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq -1$: $|M| \neq 0$, $rg(M) = rg(M') = 3 = n$. **SCD**: solución única.

Si $\alpha = 0$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La fila 3 es proporcional a la fila 2 ($F_3 = -\frac{1}{2}F_2$), y esta proporción también se

cumple en la matriz ampliada (ambas dan 0 en el término independiente). Por tanto $rg(M) = rg(M') = 2 < 3$: **SCI**, infinitas soluciones (concretamente, $z = 0$ y $x + 3y = 5$, con un grado de libertad).

Si $\alpha = -1$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Se comprueba que $F_1 + F_2 + 3F_3 = \vec{0}$ (dependencia entre filas), por lo que

$rg(M) = 2$. Pero, aplicando esa misma combinación a los términos independientes: $5 + 0 + 3(0) = 5 \neq 0$. Por tanto $rg(M) = 2 \neq rg(M') = 3$: **SI**, el sistema es incompatible (no existe equilibrio factible).

Idea clave

Esto explica por qué el enunciado avisa de que «cuando $\alpha \neq -1$ el proceso alcanza estados de equilibrio factibles»: precisamente en $\alpha = -1$ es cuando el sistema resulta incompatible.

2.1.2 (1.25 puntos)

Resolvemos por sustitución para $\alpha \neq -1$. De la ecuación del Tanque 3: $z = \alpha y$. Sustituyendo en la del Tanque 2: $\alpha x + 2\alpha y = 0 \Leftrightarrow \alpha(x + 2y) = 0$.

Caso $\alpha \neq 0$ (y $\alpha \neq -1$): entonces $x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$. Sustituyendo $x = -2y$ y $z = \alpha y$ en la ecuación del Tanque 1:

$$-2y + 3y + \alpha y = 5 \Rightarrow y(1 + \alpha) = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{\alpha + 1}.$$

Por tanto:

$$x = -2y = \frac{-10}{\alpha + 1}, \quad y = \frac{5}{\alpha + 1}, \quad z = \alpha y = \frac{5\alpha}{\alpha + 1}.$$

Caso $\alpha = 0$: como se vio en 2.1.1, el sistema es compatible indeterminado: $z = 0$ y $x + 3y = 5$ (infinitas soluciones, no una sola terna).

Opción 2.2

ENUNCIADO

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

2.2.1 (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones $AX = BX + b$.

2.2.2 (0.75 puntos) Hallar el valor de $\det(A^5(2B)^{-1})$.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular los valores de α y β , si existen, que satisfacen $\alpha A + \beta B = I$, siendo I la matriz identidad.

SOLUCIÓN

2.2.1 (1 punto)

Agrupamos los términos con X :

$$AX - BX = b \Rightarrow (A - B)X = b.$$

Calculamos $A - B = \begin{pmatrix} 2-5 & -1-(-2) \\ 1-2 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, con $\det(A - B) = (-3)(-2) - (1)(-1) = 6 + 1 = 7 \neq 0$, luego invertible:

$$(A - B)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$X = (A - B)^{-1}b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 (0.75 puntos)

Usamos las propiedades del determinante: $\det(A^5(2B)^{-1}) = \det(A)^5 \cdot \frac{1}{\det(2B)}$, y para una matriz 2×2 , $\det(cM) = c^2 \det(M)$:

$$\det(A) = 2(1) - (-1)(1) = 3, \quad \det(B) = 5(3) - (-2)(2) = 19, \quad \det(2B) = 2^2 \cdot 19 = 76.$$

$$\det(A^5(2B)^{-1}) = \frac{3^5}{76} = \frac{243}{76}.$$

2.2.3 (0.75 puntos)

Planteamos $\alpha A + \beta B = I$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + 5\beta & -\alpha - 2\beta \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la posición (1, 2): $-\alpha - 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -2\beta$. Sustituyendo en la posición (1, 1):

$$2(-2\beta) + 5\beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \alpha = -2.$$

Idea clave

Con solo 2 incógnitas (α, β) y 4 ecuaciones (una por cada entrada de la matriz), el sistema podría no tener solución. Aquí conviene comprobar con una tercera ecuación que no se haya usado: la posición (2, 2) da $\alpha + 3\beta = -2 + 3 = 1$ ✓, y la (2, 1) da $\alpha + 2\beta = -2 + 2 = 0$ ✓. Como las 4 ecuaciones son compatibles con el mismo (α, β) , la solución es válida.

La solución es $\alpha = -2, \beta = 1$.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

Opción 3.1

ENUNCIADO

Se consideran los puntos del espacio $A(0, -1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$, y el vector $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Se pide:

3.1.1 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación del plano π que es perpendicular a $\vec{v}$ y pasa por A .

3.1.2 (0.75 puntos) Encontrar una ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por B .

3.1.3 (0.75 puntos) Encontrar el punto C del plano π que está más cerca de B .

3.1.4 (0.25 puntos) Calcular la distancia del punto B al plano π .

SOLUCIÓN

3.1.1 (0.75 puntos)

Un plano perpendicular a $\vec{v}$ tiene a $\vec{v}$ como vector normal. Imponiendo que pase por $A(0, -1, 0)$:

$$2(x - 0) - 1(y - (-1)) + 1(z - 0) = 0 \Rightarrow 2x - y + z - 1 = 0.$$

Así, $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$.

3.1.2 (0.75 puntos)

Una recta perpendicular a π tiene como vector director el normal de π , es decir, $\vec{v} = (2, -1, 1)$. Pasando

por $B(1, 0, 1)$:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(2, -1, 1), \quad \text{o bien} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

Idea clave

Esta es exactamente la recta que necesitamos para hallar, en el apartado siguiente, el punto de π más cercano a B : ese punto es precisamente donde esta recta corta al plano.

3.1.3 (0.75 puntos)

El punto C más cercano a B dentro de π es la proyección ortogonal de B sobre π , que se obtiene cortando la recta de 3.1.2 con π . Sustituyendo $(1 + 2t, -t, 1 + t)$ en π :

$$2(1 + 2t) - (-t) + (1 + t) - 1 = 0 \implies 6t + 2 = 0 \implies t = -\frac{1}{3}.$$

Por tanto:

$$C = \left(1 - \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

3.1.4 (0.25 puntos)

Usamos la fórmula de la distancia punto-plano:

$$d(B, \pi) = \frac{|2(1) - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Idea clave

Comprobación rápida: la distancia BC debe coincidir. $\vec{BC} = C - B = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, y $|\vec{BC}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Coincide con el resultado anterior.

Opción 3.2

ENUNCIADO

Dado el plano $\pi : 2x + 3y - z = 0$ y los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(10, 0, -20)$, $C(0, 15, -30)$ y $D(1, 2, -1)$, se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Estudiar si el triángulo ABC está contenido en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular las coordenadas de la proyección del punto D sobre el plano formado por los puntos A , B y C .

3.2.3 (0.75 puntos) Calcular la distancia del punto D al plano π .

SOLUCIÓN

3.2.1 (0.5 puntos)

Comprobamos si A , B y C verifican la ecuación de π :

$$A : 2(0) + 3(0) - 0 = 0 \quad B : 2(10) + 3(0) - (-20) = 40 \neq 0 \quad C : 2(0) + 3(15) - (-30) = 75 \neq 0.$$

Solo A pertenece a π (de hecho, trivialmente, porque π pasa por el origen). Como B y C no verifican la ecuación de π , el triángulo ABC **no está contenido** en π .

Idea clave

Esto tiene sentido con lo que se pide después: el apartado 3.2.2 habla del «plano formado por los puntos A, B, C » como algo distinto de π — precisamente porque son dos planos diferentes.

3.2.2 (1.25 puntos)

Hallamos el plano π' que contiene a A, B, C . Vectores directores: $\vec{AB} = (10, 0, -20)$, $\vec{AC} = (0, 15, -30)$. Su producto vectorial da el vector normal:

$$\vec{n}' = \vec{AB} \times \vec{AC} = (300, 300, 150) = 150(2, 2, 1).$$

Como π' pasa por el origen (A), su ecuación es $\pi' : 2x + 2y + z = 0$ (se comprueba que B y C la verifican).

Proyectamos $D(1, 2, -1)$ sobre π' con la fórmula $D' = D - \frac{\vec{n}' \cdot D}{|\vec{n}'|^2} \vec{n}'$:

$$\vec{n}' \cdot D = 2(1) + 2(2) + 1(-1) = 5, \quad |\vec{n}'|^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 = 9.$$

$$D' = (1, 2, -1) - \frac{5}{9}(2, 2, 1) = \left(\frac{9-10}{9}, \frac{18-10}{9}, \frac{-9-5}{9}\right) = \left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{14}{9}\right).$$

3.2.3 (0.75 puntos)

Aplicamos la fórmula de distancia de un punto al plano $\pi : 2x + 3y - z = 0$:

$$d(D, \pi) = \frac{|2(1) + 3(2) - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}.$$

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

Opción 4.1

ENUNCIADO

Un brote de gripe se propaga a lo largo de unos días. El coeficiente de gravedad de la gripe t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ cuya derivada es $F'(t) = t^2(10 - t)$. Se pide:

4.1.1 (1.25 puntos) Calcular la función $F(t)$ sabiendo que en $t = 0$ el coeficiente de gravedad es 6.

4.1.2 (1.25 puntos) Calcular cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el valor máximo del coeficiente y cuál es dicho número.

SOLUCIÓN

4.1.1 (1.25 puntos)

F es una primitiva de $F'(t) = t^2(10 - t) = 10t^2 - t^3$:

$$F(t) = \int (10t^2 - t^3) dt = \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + C.$$

Imponemos $F(0) = 6$: como los términos en t se anulan en $t = 0$, resulta $C = 6$. Por tanto:

$$F(t) = \frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + 6.$$

4.1.2 (1.25 puntos)

Buscamos el máximo de F para $t \geq 0$. Los puntos críticos son los que anulan $F'(t) = t^2(10 - t)$: $t = 0$ (raíz doble) y $t = 10$.

Idea clave

En $t = 0$ la derivada se anula pero *no cambia de signo* (el factor t^2 es siempre ≥ 0 a ambos lados), así que no es un extremo, solo un punto de inflexión de la tendencia. El verdadero cambio de signo ocurre en $t = 10$: $F'(t) > 0$ para $0 < t < 10$ (creciente) y $F'(t) < 0$ para $t > 10$ (decreciente).

Por tanto, F alcanza su valor **máximo** en $t = 10$ días, con

$$F(10) = \frac{10}{3}(1000) - \frac{1}{4}(10000) + 6 = \frac{10000}{3} - 2500 + 6 = \frac{2518}{3} \approx 839.33.$$

Opción 4.2**ENUNCIADO**

Un arquitecto está diseñando un pequeño invernadero para un jardín. El suelo del invernadero tiene forma de triángulo para maximizar la eficiencia y la captación de luz. El perímetro total del invernadero está fijado en 60 metros para cumplir con las restricciones medioambientales de la zona; uno de los lados del triángulo mide x metros y los otros dos lados tienen la misma longitud. Se pide:

4.2.1 (1 punto) Deducir la expresión de la función $A(x)$ que representa el área del suelo del invernadero.

4.2.2 (1.5 puntos) El arquitecto define una función de eficiencia estructural, $f(x)$, que se calcula como el cuadrado del área del suelo del invernadero. Obtener el valor de x para el que la eficiencia estructural es máxima y hallar el área en este caso.

SOLUCIÓN

4.2.1 (1 punto)

El triángulo es isósceles: un lado mide x y los otros dos, iguales entre sí, miden y cada uno. Como el perímetro es 60:

$$x + 2y = 60 \implies y = 30 - \frac{x}{2}.$$

La altura h sobre el lado x (por Pitágoras, dividiendo el triángulo isósceles en dos rectángulos iguales) es

$$h = \sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Idea clave

Antes de sustituir, conviene factorizar $y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ como diferencia de cuadrados: $\left(y - \frac{x}{2}\right)\left(y + \frac{x}{2}\right)$. Con $y = 30 - \frac{x}{2}$, el primer factor es $30 - x$ y el segundo es 30 , lo que simplifica mucho la raíz.

$$y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(30 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)\left(30 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = (30 - x)(30) = 30(30 - x).$$

Por tanto $h = \sqrt{30(30 - x)}$, y el área es

$$A(x) = \frac{1}{2} x h = \frac{x}{2} \sqrt{30(30 - x)}, \quad 0 < x < 30,$$

donde el dominio viene de exigir $y > 0$ y que se cumpla la desigualdad triangular ($2y > x$).

4.2.2 (1.5 puntos)

La eficiencia estructural es

$$f(x) = [A(x)]^2 = \frac{x^2}{4} \cdot 30(30 - x) = \frac{15}{2} (30x^2 - x^3).$$

Derivamos:

$$f'(x) = \frac{15}{2} (60x - 3x^2) = \frac{45}{2} x(20 - x).$$

Se anula en $x = 0$ (fuera del dominio, o degenerado) y en $x = 20$. Para $x \in (0, 20)$, $f'(x) > 0$ (creciente); para $x \in (20, 30)$, $f'(x) < 0$ (decreciente). Por tanto, $x = 20$ es un **máximo**.

Idea clave

Con $x = 20$: $y = 30 - 10 = 20$. ¡Los tres lados miden 20! El triángulo óptimo es equilátero — un resultado clásico: para un perímetro fijo, el triángulo de área máxima es siempre el equilátero.

El área en este caso:

$$A(20) = \frac{20}{2} \sqrt{30(30 - 20)} = 10\sqrt{300} = 10 \cdot 10\sqrt{3} = 100\sqrt{3} \approx 173.2 \text{ m}^2.$$