

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Extraordinaria 2023

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Formato de este examen: elige 4 problemas de los 8 propuestos. Cada problema puntúa hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio es la suma de las calificaciones de los 4 problemas elegidos, dividida entre 4 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto ni fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Idea clave

Este examen usa el formato anterior de la Comunidad Valenciana: 8 problemas independientes de los que solo se responden 4. Aquí resolvemos los 8, como recurso de repaso completo.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PROBLEMA 1: Sistema matricial con parámetro (10 puntos)**ENUNCIADO**

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

- Discutir el sistema en función del parámetro a . (6 puntos)
- Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Llamamos $M = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante desarrollando por la primera fila:

$$|M| = 2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix} - (a+1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix} = a(a+2) - 2 = a^2 + 2a - 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2) - 2 = a, \quad \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a.$$

Sustituyendo:

$$|M| = 2(a^2 + 2a - 2) - (a+1)(a) + (1-a) = 2a^2 + 4a - 4 - a^2 - a + 1 - a = a^2 + 2a - 3.$$

Factorizamos: $a^2 + 2a - 3 = (a - 1)(a + 3)$.

Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$: $|M| \neq 0$, $rg(M) = rg(M') = 3 = n$. **SCD**: solución única.

Si $a = -3$: sustituyendo, se comprueba que $rg(M) = 2$ mientras que $rg(M') = 3$ (el término independiente rompe la dependencia entre filas que sí se cumple en la matriz de coeficientes). **SI**: incompatible.

Si $a = 1$: $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Restando la segunda fila a la tercera: $F_3 - F_2 = (0, 0, 1)$, y la primera fila menos el doble de la segunda: $F_1 - 2F_2 = (0, 0, -3)$, que es proporcional a $(0, 0, 1)$: hay dependencia entre filas, $rg(M) = 2$. Comprobando con el término independiente, esa misma dependencia se mantiene ($rg(M') = 2$). **SCI**: infinitas soluciones.

b) Resolvemos para $a = 1$: el sistema es

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación a la tercera: $z = 1$. Sustituyendo en la segunda: $x + y + 2 = 1 \Rightarrow x + y = -1 \Rightarrow x = -y - 1$.

Idea clave

Comprobamos con la primera ecuación, que no hemos usado todavía: $2(-y - 1) + 2y + 1 = -2y - 2 + 2y + 1 = -1$ ✓, se cumple para cualquier y , confirmando que y queda como parámetro libre.

La solución general, con $y \in \mathbb{R}$ como parámetro libre, es:

$$(x, y, z) = (-y - 1, y, 1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 2: Matriz con parámetro: $(A - \alpha I)^2$ (10 puntos)

ENUNCIADO

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

- La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)
- El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Primero calculamos $A - \alpha I$:

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Ahora elevamos al cuadrado, multiplicando $(A - \alpha I)$ por sí misma fila a fila. Calculamos cada entrada del producto:

Fila 1 $\times$ columna 1: $(-\alpha)(-\alpha) + (-1)(-1) + (-2)(1) = \alpha^2 + 1 - 2 = \alpha^2 - 1$.

Fila 1 $\times$ columna 2: $(-\alpha)(-1) + (-1)(-\alpha) + (-2)(1) = \alpha + \alpha - 2 = 2\alpha - 2$.

Fila 1 $\times$ columna 3: $(-\alpha)(-2) + (-1)(-2) + (-2)(3 - \alpha) = 2\alpha + 2 - 6 + 2\alpha = 4\alpha - 4$.

Por simetría de la estructura (filas 1 y 2 de $A - \alpha I$ son muy parecidas), la fila 2 del producto resulta $(2\alpha - 2, \alpha^2 - 1, 4\alpha - 4)$, y calculando la fila 3:

Fila 3 $\times$ columna 1: $(1)(-\alpha) + (1)(-1) + (3 - \alpha)(1) = -\alpha - 1 + 3 - \alpha = 2 - 2\alpha$.

Fila 3 $\times$ columna 3: $(1)(-2) + (1)(-2) + (3 - \alpha)(3 - \alpha) = -4 + (3 - \alpha)^2 = -4 + 9 - 6\alpha + \alpha^2 = \alpha^2 - 6\alpha + 5$.

Reuniendo todo:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ 2 - 2\alpha & 2 - 2\alpha & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Antes de igualar a cero, conviene factorizar cada entrada sacando $(\alpha - 1)$ como factor común: $\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$, $2\alpha - 2 = 2(\alpha - 1)$, $4\alpha - 4 = 4(\alpha - 1)$, $2 - 2\alpha = -2(\alpha - 1)$, y $\alpha^2 - 6\alpha + 5 = (\alpha - 1)(\alpha - 5)$.

Con esta factorización:

$$M = (\alpha - 1) \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 2 & 4 \\ 2 & \alpha + 1 & 4 \\ -2 & -2 & \alpha - 5 \end{pmatrix}.$$

b) Para que M sea la matriz nula, como todas las entradas comparten el factor $(\alpha - 1)$, basta que $\alpha - 1 = 0$: entonces $M = 0 \cdot (...) = 0$, la matriz nula, **sin importar los valores de la segunda matriz** (que no se anula para ningún α , ya que tiene entradas constantes no nulas como el 2 y el 4).

Idea clave

Esto confirma que $\alpha = 1$ es la **única** solución: si $\alpha \neq 1$, el factor $(\alpha - 1)$ no es cero, y la segunda matriz nunca es la matriz nula (sus entradas 2, 4, -2 son constantes), así que el producto tampoco podría ser cero.

El valor buscado es $\alpha = 1$.

PROBLEMA 3: Recta por dos puntos, plano perpendicular y distancia (10 puntos)

ENUNCIADO

Dados los puntos $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ y $C = (-1, 0, 0)$:

- Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B . (3 puntos)
- Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C . (4 puntos)
- Calcular la distancia del punto A al plano π . (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) El vector director de r es $\vec{AB} = B - A = (1 - 2, 2 - (-1), 3 - 0) = (-1, 3, 3)$. La ecuación continua de r , pasando por $A = (2, -1, 0)$, es:

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z}{3}.$$

Para obtener la ecuación **implícita** (como intersección de dos planos), igualamos las fracciones dos a dos:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{3} \implies 3(x-2) = -1(y+1) \implies 3x + y - 5 = 0,$$

$$\frac{y+1}{3} = \frac{z}{3} \implies y+1 = z \implies y - z + 1 = 0.$$

$$r : \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Un plano perpendicular a r tiene como vector normal la dirección de r , $\vec{AB} = (-1, 3, 3)$. Imponiendo que pase por $C = (-1, 0, 0)$:

$$-1(x+1) + 3(y-0) + 3(z-0) = 0 \implies -x - 1 + 3y + 3z = 0, \quad \text{o bien} \quad x - 3y - 3z + 1 = 0.$$

c) Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano, con $A = (2, -1, 0)$ y $\pi : -x + 3y + 3z - 1 = 0$ (reescribiendo con el signo del apartado anterior, equivalente):

$$d(A, \pi) = \frac{|-1(2) + 3(-1) + 3(0) - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{|-2 - 3 - 1|}{\sqrt{19}} = \frac{6}{\sqrt{19}} = \frac{6\sqrt{19}}{19} \approx 1.3765.$$

PROBLEMA 4: Posición relativa recta-plano con parámetro (10 puntos)

ENUNCIADO

Dada la recta $r : (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi : 5x + my + z = 2$:

- Obtener la posición relativa de r y π en función de m . (6 puntos)
- Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π . (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) El vector director de r es $\vec{d}_r = (-1, -1, 2)$, y el normal de π es $\vec{n}_\pi = (5, m, 1)$. Calculamos el producto escalar:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1)(5) + (-1)(m) + (2)(1) = -5 - m + 2 = -m - 3.$$

Esto se anula cuando $m = -3$: en ese caso, r es paralela a π (o está contenida en él); para $m \neq -3$, la recta y el plano se cortan en un único punto (**secantes**).

Idea clave

Para distinguir, en $m = -3$, si r es estrictamente paralela (sin puntos comunes) o está *contenida* en π , comprobamos si el punto de r , $(1, 1, 0)$, satisface la ecuación de π para m general.

Sustituyendo $(1, 1, 0)$ en $5x + my + z - 2 = 0$: $5(1) + m(1) + 0 - 2 = m + 3$. Esta expresión se anula exactamente cuando $m = -3$: el **mismo** valor que anula el producto escalar anterior.

Por tanto, en $m = -3$ **ambas** condiciones (dirección paralela al plano, y punto de la recta en el plano) se cumplen simultáneamente: la recta r está **contenida** en π .

Resumen: para $m \neq -3$, r y π son secantes (se cortan en un punto); para $m = -3$, $r \subset \pi$ (la recta está contenida en el plano).

b) Para $m = 1$: $\pi : 5x + y + z = 2$, con normal $\vec{n}_\pi = (5, 1, 1)$. El plano π' buscado debe contener a r (por tanto, su normal debe ser perpendicular a $\vec{d}_r$) y ser perpendicular a π (por tanto, su normal debe ser perpendicular también a $\vec{n}_\pi$). Así, el normal de π' es:

$$\vec{n}' = \vec{n}_\pi \times \vec{d}_r = (5, 1, 1) \times (-1, -1, 2).$$

Calculamos cada componente:

$$\vec{i} : (1)(2) - (1)(-1) = 3,$$

$$\vec{j} : -[(5)(2) - (1)(-1)] = -(10 + 1) = -11,$$

$$\vec{k} : (5)(-1) - (1)(-1) = -4.$$

$$\vec{n}' = (3, -11, -4).$$

Imponiendo que π' pase por el punto de r , $(1, 1, 0)$:

$$3(x - 1) - 11(y - 1) - 4(z - 0) = 0 \implies 3x - 3 - 11y + 11 - 4z = 0 \implies 3x - 11y - 4z + 8 = 0.$$

PROBLEMA 5: Función racional: discontinuidad evitable, monotonía e integral (10 puntos)

ENUNCIADO

Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$.

a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)

c) Obtener $\int f(x) dx$. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Factorizamos numerador y denominador. Para el numerador, buscamos sus raíces: $-2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{4}$, es decir, $x = 1$ o $x = -\frac{1}{2}$. Por tanto:

$$-2x^2 + x + 1 = -2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = -(x - 1)(2x + 1).$$

Para el denominador: $2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{4}$, es decir, $x = -\frac{1}{2}$ o $x = -2$. Por tanto:

$$2x^2 + 5x + 2 = 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 2)(2x + 1).$$

Así:

$$f(x) = \frac{-(x - 1)(2x + 1)}{(x + 2)(2x + 1)}.$$

Idea clave

Numerador y denominador comparten el factor $(2x + 1)$, que se anula exactamente en $x = -\frac{1}{2}$: ambos se anulan a la vez ahí, produciendo una indeterminación $\frac{0}{0}$ típica de una discontinuidad evitable, no una asíntota vertical.

Cancelando el factor común (válido para $x \neq -\frac{1}{2}$):

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{x+2} = \frac{1-x}{x+2}, \quad x \neq -\frac{1}{2}, x \neq -2.$$

El límite cuando $x \rightarrow -\frac{1}{2}$ de esta expresión simplificada existe y vale $\frac{1 - (-1/2)}{-1/2 + 2} = \frac{3/2}{3/2} = 1$, un número finito. Como f no está definida en $x = -\frac{1}{2}$ pero el límite ahí existe (y es finito), se trata efectivamente de una **discontinuidad evitable**: bastaría definir $f(-\frac{1}{2}) = 1$ para hacerla continua en ese punto.

b) Trabajamos con la forma simplificada $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ (válida en todo el dominio salvo el punto evitable, que no afecta a la monotonía). Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(-1)(x+2) - (1-x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{-x-2-1+x}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2}.$$

Como $(x+2)^2 > 0$ para todo $x \neq -2$, el signo de $f'(x)$ es siempre **negativo**. No hay ningún punto donde $f'(x) = 0$ ni cambie de signo.

Idea clave

Al ser $f'(x) < 0$ en todo el dominio, f es estrictamente decreciente en cada uno de los dos intervalos que separa la asíntota vertical $x = -2$; no tiene máximos ni mínimos.

f es decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, +\infty)$.

c) Integramos la forma simplificada:

$$\int f(x) dx = \int \frac{1-x}{x+2} dx.$$

Idea clave

Para integrar una fracción donde el grado del numerador no es menor que el del denominador (aquí, ambos grado 1), primero se divide: escribimos $1-x = -(x+2)+3$, de modo que $\frac{1-x}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2}$.

Comprobamos la división: $-(x+2)+3 = -x-2+3 = 1-x$ ✓. Entonces:

$$\int f(x) dx = \int \left(-1 + \frac{3}{x+2}\right) dx = -x + 3 \ln|x+2| + C.$$

PROBLEMA 6: Ventana con semicírculo: perímetro fijo, área máxima (10 puntos)**ENUNCIADO**

Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo, según se indica en la figura del enunciado. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

- Calcular el área de la ventana en función de su anchura x . (3 puntos)
- Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)
- Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

SOLUCIÓN

a) Llamamos x a la anchura (que coincide con el diámetro del semicírculo, de radio $\frac{x}{2}$) y h a la altura del rectángulo. El perímetro consta del lado inferior (x), los dos lados verticales (h cada uno) y el arco del semicírculo (longitud $\pi \cdot \frac{x}{2}$); el lado superior del rectángulo **no** forma parte del perímetro, porque queda «dentro» de la ventana:

$$20 = x + 2h + \frac{\pi x}{2}.$$

Despejamos h :

$$h = \frac{20 - x - \frac{\pi x}{2}}{2} = 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}.$$

El área total es la del rectángulo más la del semicírculo:

$$A(x) = xh + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x\left(10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8}.$$

Desarrollamos:

$$A(x) = 10x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = 10x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8} = 10x - \frac{x^2(4 + \pi)}{8}.$$

b) Derivamos:

$$A'(x) = 10 - \frac{2x(4 + \pi)}{8} = 10 - \frac{x(4 + \pi)}{4}.$$

Igualamos a cero:

$$10 = \frac{x(4 + \pi)}{4} \implies x = \frac{40}{4 + \pi} \approx 5.60 \text{ m.}$$

Comprobamos que es un máximo: $A''(x) = -\frac{4 + \pi}{4} < 0$ para todo x (constante negativa), luego cualquier punto crítico es un máximo.

Calculamos la altura correspondiente:

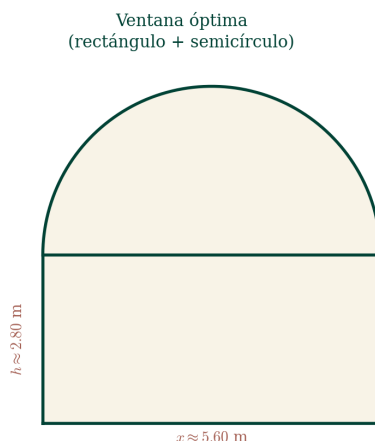
$$h = 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4} = 10 - \frac{x(2 + \pi)}{4}.$$

Sustituyendo $x = \frac{40}{4 + \pi}$ y simplificando (multiplicando y agrupando sobre el denominador común $4 + \pi$):

$$h = \frac{10(4 + \pi) - 10(2 + \pi)}{4 + \pi} = \frac{40 + 10\pi - 20 - 10\pi}{4 + \pi} = \frac{20}{4 + \pi} \approx 2.80 \text{ m.}$$

Idea clave

Fíjate en que $h = \frac{20}{4 + \pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{4 + \pi} = \frac{x}{2}$: en el óptimo, la altura del rectángulo coincide exactamente con el **radio** del semicírculo. Este es un resultado clásico de este tipo de problema («ventana normanda»).



Las dimensiones óptimas son $x = \frac{40}{4 + \pi} \approx 5.60$ m de ancho y $h = \frac{20}{4 + \pi} \approx 2.80$ m de altura (del rectángulo).

c) Sustituimos $x = \frac{40}{4 + \pi}$ en $A(x) = 10x - \frac{x^2(4 + \pi)}{8}$. Usando que $x^2(4 + \pi) = x \cdot [x(4 + \pi)] = x \cdot 40$ (ya que $x(4 + \pi) = 40$ por la propia ecuación que define x):

$$A(x) = 10x - \frac{40x}{8} = 10x - 5x = 5x = 5 \cdot \frac{40}{4 + \pi} = \frac{200}{4 + \pi}.$$

Idea clave

Este atajo algebraico (sustituir $x(4 + \pi) = 40$ en vez de elevar x al cuadrado explícitamente) evita trabajar con fracciones dentro de fracciones.

El área máxima es:

$$A_{\text{máx}} = \frac{200}{4 + \pi} \approx 28.0050 \text{ m}^2.$$

PROBLEMA 7: Urna con tres colores (10 puntos)

ENUNCIADO

En una urna hay tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas, todas de igual tamaño.

- Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite una vez más esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)
- Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

SOLUCIÓN

La urna tiene $3 + 4 + 5 = 12$ bolas en total, con $P(\text{verde}) = \frac{3}{12}$, $P(\text{roja}) = \frac{4}{12}$, $P(\text{amarilla}) = \frac{5}{12}$.

a) Como se devuelve la bola tras cada extracción, las dos extracciones son **independientes** y con las mismas probabilidades. La probabilidad de que ambas sean del mismo color es la suma de los tres casos posibles (las dos verdes, o las dos rojas, o las dos amarillas):

$$P(\text{mismo color}) = \left(\frac{3}{12}\right)^2 + \left(\frac{4}{12}\right)^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{9 + 16 + 25}{144} = \frac{50}{144} = \frac{25}{72} \approx 0.3472.$$

Por complementario:

$$P(\text{colores distintos}) = 1 - \frac{25}{72} = \frac{47}{72} \approx 0.6528.$$

b) Ahora las tres bolas se extraen **simultáneamente** (sin reposición, sin orden). El número total de formas de elegir 3 bolas de las 12 es $\binom{12}{3}$, y el número de formas de elegir una de cada color es $3 \times 4 \times 5$ (una verde, cualquiera de las 3; una roja, cualquiera de las 4; una amarilla, cualquiera de las 5).

Idea clave

Como se extraen «al mismo tiempo» (sin orden ni reposición), el espacio muestral natural es el de combinaciones, no de secuencias ordenadas; por eso usamos $\binom{12}{3}$ en el denominador.

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220.$$

$$P(\text{tres colores distintos}) = \frac{3 \times 4 \times 5}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 0.2727.$$

PROBLEMA 8: Probabilidad: dos plantas de producción (10 puntos)

ENUNCIADO

Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0.02 y la segunda planta con probabilidad 0.06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0.7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

- La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)
- Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

SOLUCIÓN

Denotamos P_1, P_2 los sucesos «procede de la planta 1 / 2», con $P(P_1) = 0.7$ y $P(P_2) = 1 - 0.7 = 0.3$. Y D = «es defectuoso», con $P(D | P_1) = 0.02$ y $P(D | P_2) = 0.06$.

a) Se pide $P(P_2 \cap D)$, que por la definición de probabilidad condicionada es:

$$P(P_2 \cap D) = P(P_2) \cdot P(D | P_2) = 0.3 \times 0.06 = 0.018 = \frac{9}{500}.$$

b) Necesitamos $P(P_1 | D)$. Primero, por el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(P_1)P(D | P_1) + P(P_2)P(D | P_2) = (0.7)(0.02) + (0.3)(0.06) = 0.014 + 0.018 = 0.032.$$

Idea clave

Nótese que $P(P_2 \cap D) = 0.018$, calculado en el apartado a), es exactamente uno de los dos sumandos de $P(D)$: no hace falta recalcularlo.

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(P_1 | D) = \frac{P(P_1) P(D | P_1)}{P(D)} = \frac{0.014}{0.032} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16} = 0.4375.$$