

Prueba de Acceso a la Universidad
Comunidad Valenciana -- Extraordinaria 2022
Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Formato de este examen: elige 3 problemas de los 6 propuestos. Cada problema puntúa hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio es la suma de las calificaciones de los 3 problemas elegidos, dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Idea clave

Este examen (2022) usa el formato de **6 problemas, elige 3** (no 8/4 como en 2023-2024). Aquí resolvemos los 6, como recurso de repaso completo.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PROBLEMA 1: Sistema con parámetro (10 puntos)**ENUNCIADO**

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases}.$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro real a . (5 puntos)
- b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante desarrollando por la

segunda fila:

$$|M| = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & a - 1 \end{vmatrix} + 0 - 1 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & a - 1 \end{vmatrix} = (a - 1), \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$

Sustituyendo:

$$|M| = -(a - 1) - (a^2 - 1) = -a + 1 - a^2 + 1 = -a^2 - a + 2.$$

Factorizamos: $-a^2 - a + 2 = -(a^2 + a - 2) = -(a - 1)(a + 2)$.

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $|M| \neq 0$, $rg(M) = rg(M') = 3 = n$. **SCD**: solución única.

Si $a = -2$: sustituyendo, se comprueba que $rg(M) = 2$ pero $rg(M') = 3$: el sistema es **incompatible (SI)**.

Si $a = 1$: sustituyendo, $rg(M) = rg(M') = 2 < 3$: el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**.

b) El sistema es compatible en dos situaciones: cuando $a \neq 1, -2$ (solución única) y cuando $a = 1$ (infinitas soluciones). Resolvemos ambos casos.

Caso general ($a \neq 1, -2$). Resolvemos por sustitución. De la segunda ecuación, $z = 1 - x$. Sustituyendo en la tercera:

$$x + ay + (a - 1)(1 - x) = a \implies x + ay + (a - 1) - (a - 1)x = a \implies x(1 - (a - 1)) + ay = a - (a - 1) = 1.$$

$$x(2 - a) + ay = 1.$$

De la primera ecuación, $y = 1 - ax$. Sustituyendo:

$$x(2 - a) + a(1 - ax) = 1 \implies x(2 - a) + a - a^2x = 1 \implies x(2 - a - a^2) = 1 - a.$$

Como $2 - a - a^2 = -(a^2 + a - 2) = -(a - 1)(a + 2)$, y $1 - a = -(a - 1)$:

$$x = \frac{-(a - 1)}{-(a - 1)(a + 2)} = \frac{1}{a + 2}.$$

Entonces:

$$y = 1 - ax = 1 - \frac{a}{a + 2} = \frac{2}{a + 2}, \quad z = 1 - x = 1 - \frac{1}{a + 2} = \frac{a + 1}{a + 2}.$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a + 2}, \frac{2}{a + 2}, \frac{a + 1}{a + 2} \right), \quad a \neq 1, -2.$$

Caso $a = 1$. El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

(la primera y la tercera ecuación son idénticas). De la segunda, $z = 1 - x$; de la primera, $y = 1 - x$. Tomando x como parámetro libre:

$$(x, y, z) = (x, 1 - x, 1 - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 2: Matriz 2×2 con parámetros e inversa dada (10 puntos)

ENUNCIADO

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a + b & 1 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$:

- Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)
- Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 . (3 puntos)
- Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) Como A es triangular superior, su determinante es el producto de la diagonal: $|A| = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Calculamos la inversa con la fórmula directa para matrices 2×2 triangulares:

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a-b & -1 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

Igualando esta expresión a $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entrada a entrada:

$$(2,2): \frac{a+b}{a^2 - b^2} = 1 \implies \frac{1}{a-b} = 1 \implies a-b = 1,$$

$$(1,1): \frac{a-b}{a^2 - b^2} = 1 \implies \frac{1}{a+b} = 1 \implies a+b = 1.$$

Idea clave

Estas dos ecuaciones ($a-b = 1$ y $a+b = 1$) forman un sistema 2×2 inmediato de resolver por suma.

Sumando ambas: $2a = 2 \implies a = 1$; restando: $2b = 0 \implies b = 0$. Comprobamos con la entrada (1,2): $\frac{-1}{a^2 - b^2} = \frac{-1}{1} = -1 \checkmark$.

Los valores son $a = 1$, $b = 0$.

b) Con $a = 1$, $b = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Se observa un patrón: cada vez que multiplicamos por A de nuevo, el elemento (1,2) aumenta en 1. Esto es característico de las matrices triangulares con 1 en la diagonal (matrices «unipotentes»):

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos multiplicando una vez más para $A^3 = A^2 \cdot A$:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y $A^4 = A^3 \cdot A$:

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Este apartado es independiente de los valores concretos hallados en a): trabajamos con a, b genéricos, sabiendo solo que $a^2 - b^2 \neq 0$ (para que A sea invertible). Usamos dos propiedades del determinante:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \text{ y } \det(M^n) = \det(M)^n.$$

$$\det(A^{-50}) = \det(A)^{-50} = (a^2 - b^2)^{-50} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}.$$

PROBLEMA 3: Recta por dos puntos, plano paralelo y distancia punto-recta (10 puntos)

ENUNCIADO

Dados los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, y la recta $s : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

- Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B . (2 puntos)
- Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . (4 puntos)
- Calcular la distancia del punto A a la recta s . (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) El vector director de r es $\vec{AB} = B - A = (-2, 1, 0)$. La recta, pasando por $A = (2, 0, 0)$, es:

$$r : \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}.$$

Idea clave

El denominador 0 en la componente z no indica una división por cero: simplemente expresa que la recta tiene z constante (aquí, $z = 0$), ya que la componente z del vector director es nula.

Podemos escribirla también como $r : \begin{cases} \frac{x-2}{-2} = y \\ z = 0 \end{cases}$.

b) El plano buscado contiene a s (con dirección $\vec{d}_s = (2, 3, 1)$, leída de su ecuación continua) y es paralelo a r (con dirección $\vec{d}_r = (-2, 1, 0)$). Su vector normal es:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-2, 1, 0) \times (2, 3, 1).$$

Calculamos cada componente:

$$\vec{i} : (1)(1) - (0)(3) = 1, \quad \vec{j} : -[(-2)(1) - (0)(2)] = 2, \quad \vec{k} : (-2)(3) - (1)(2) = -8.$$

$$\vec{n} = (1, 2, -8).$$

Como el plano debe contener a s , tomamos un punto de s : con parámetro 0 en la ecuación continua, $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Imponiendo que el plano pase por este punto:

$$1(x-1) + 2(y-1) - 8(z-0) = 0 \implies x-1+2y-2-8z=0 \implies x+2y-8z-3=0.$$

c) Usamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta mediante el producto vectorial. Con $R =$

$(1, 1, 0)$ un punto de s y $\vec{d}_s = (2, 3, 1)$:

$$\vec{RA} = A - R = (2 - 1, 0 - 1, 0 - 0) = (1, -1, 0).$$

$$\vec{RA} \times \vec{d}_s = (1, -1, 0) \times (2, 3, 1).$$

Calculamos cada componente:

$$\vec{i} : (-1)(1) - (0)(3) = -1, \quad \vec{j} : -[(1)(1) - (0)(2)] = -1, \quad \vec{k} : (1)(3) - (-1)(2) = 5.$$

$$\vec{RA} \times \vec{d}_s = (-1, -1, 5), \quad |\vec{RA} \times \vec{d}_s| = \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

$$d(A, s) = \frac{|\vec{RA} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{42}}{14} \approx 1.3887.$$

PROBLEMA 4: Punto de corte con recta perpendicular y área de un triángulo (10 puntos)

ENUNCIADO

Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

- El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B . (5 puntos)
- El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C . (5 puntos)

SOLUCIÓN

a) La recta perpendicular a π que pasa por B tiene como dirección el vector normal de π , $\vec{n}_\pi = (2, 2, 1)$:

$$(x, y, z) = (3, 2, 3) + t(2, 2, 1).$$

Sustituimos en la ecuación de π :

$$2(3 + 2t) + 2(2 + 2t) + (3 + t) = 3 \implies 6 + 4t + 4 + 4t + 3 + t = 3 \implies 13 + 9t = 3 \implies t = -\frac{10}{9}.$$

El punto de corte es:

$$C = \left(3 + 2\left(-\frac{10}{9}\right), 2 + 2\left(-\frac{10}{9}\right), 3 + \left(-\frac{10}{9}\right) \right) = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9} \right).$$

Idea clave

Comprobación: sustituyendo C en π , $2\left(\frac{7}{9}\right) + 2\left(-\frac{2}{9}\right) + \frac{17}{9} = \frac{14 - 4 + 17}{9} = \frac{27}{9} = 3 \checkmark$.

b) El área de un triángulo con vértices A , B , C es la mitad del módulo del producto vectorial de dos de sus lados:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Calculamos $\vec{AB} = B - A = (1, 1, 5)$ y $\vec{AC} = C - A = \left(\frac{7}{9} - 2, -\frac{2}{9} - 1, \frac{17}{9} + 2\right) = \left(-\frac{11}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{35}{9}\right)$.

Idea clave

Antes de calcular el producto vectorial completo con fracciones, observamos que $\vec{AC}$ es proporcional a $C - A$ multiplicado por 9: trabajamos con $9\vec{AC} = (-11, -11, 35)$ y al final dividimos el resultado entre 9.

$$\vec{AB} \times (9\vec{AC}) = (1, 1, 5) \times (-11, -11, 35).$$

Calculamos cada componente:

$$\vec{i} : (1)(35) - (5)(-11) = 35 + 55 = 90,$$

$$\vec{j} : -[(1)(35) - (5)(-11)] = -90,$$

$$\vec{k} : (1)(-11) - (1)(-11) = 0.$$

$$\vec{AB} \times (9\vec{AC}) = (90, -90, 0), \quad \text{luego} \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \frac{1}{9}(90, -90, 0) = (10, -10, 0).$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{100 + 100 + 0} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \approx 7.0711.$$

PROBLEMA 5: Integral racional definida con parámetro (10 puntos)**ENUNCIADO**

- a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: $\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$. (5 puntos)
- b) Determinar, en función de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$. (2 puntos)
- c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$. (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) Factorizamos el denominador buscando sus raíces: $x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 9}{2}$, es decir, $x = 7$ o $x = -2$. Así:

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2).$$

Descomponemos en fracciones simples: $\frac{18}{(x - 7)(x + 2)} = \frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 2}$.

Idea clave

Para hallar A , multiplicamos toda la igualdad por $(x - 7)$ y evaluamos en $x = 7$ (donde el término con B se anula): $A = \frac{18}{7 + 2} = 2$. Análogamente, para B multiplicamos por $(x + 2)$ y evaluamos en $x = -2$: $B = \frac{18}{-2 - 7} = -2$.

$$\frac{18}{(x - 7)(x + 2)} = \frac{2}{x - 7} - \frac{2}{x + 2}.$$

Integrando:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = 2 \ln |x - 7| - 2 \ln |x + 2| + C.$$

b) Aplicamos la regla de Barrow entre 8 y t (con $t > 8$, así que tanto $t - 7 > 0$ como $t + 2 > 0$, y podemos quitar los valores absolutos):

$$\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = \left[2 \ln(x - 7) - 2 \ln(x + 2) \right]_8^t = (2 \ln(t - 7) - 2 \ln(t + 2)) - (2 \ln 1 - 2 \ln 10).$$

Como $\ln 1 = 0$:

$$= 2 \ln(t - 7) - 2 \ln(t + 2) + 2 \ln 10 = 2 \ln\left(\frac{10(t - 7)}{t + 2}\right).$$

c) Igualamos el resultado anterior a $\ln \frac{25}{4}$:

$$2 \ln\left(\frac{10(t - 7)}{t + 2}\right) = \ln \frac{25}{4}.$$

Idea clave

Pasamos el 2 como exponente dentro del logaritmo ($2 \ln u = \ln u^2$) para poder comparar directamente los argumentos.

$$\ln \left[\left(\frac{10(t - 7)}{t + 2} \right)^2 \right] = \ln \frac{25}{4} \implies \left(\frac{10(t - 7)}{t + 2} \right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Como $t > 8$, el cociente $\frac{10(t - 7)}{t + 2}$ es positivo, así que tomamos la raíz cuadrada positiva:

$$\frac{10(t - 7)}{t + 2} = \frac{5}{2} \implies 20(t - 7) = 5(t + 2) \implies 20t - 140 = 5t + 10 \implies 15t = 150 \implies t = 10.$$

PROBLEMA 6: Rectángulo de área máxima bajo una gaussiana (10 puntos)

ENUNCIADO

Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x . Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY . Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

- Determinar el área del rectángulo en función de x . (3 puntos)
- Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

SOLUCIÓN

a) El rectángulo tiene un vértice en el origen y el vértice opuesto en $M = (x, f(x))$, así que sus lados miden x (horizontal) y $f(x) = e^{-x^2}$ (vertical):

$$A(x) = x \cdot e^{-x^2}, \quad x > 0.$$

b) Derivamos con la regla del producto, $u = x$ ($u' = 1$) y $v = e^{-x^2}$ ($v' = -2x e^{-x^2}$, por la regla de la cadena):

$$A'(x) = e^{-x^2} + x(-2x e^{-x^2}) = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

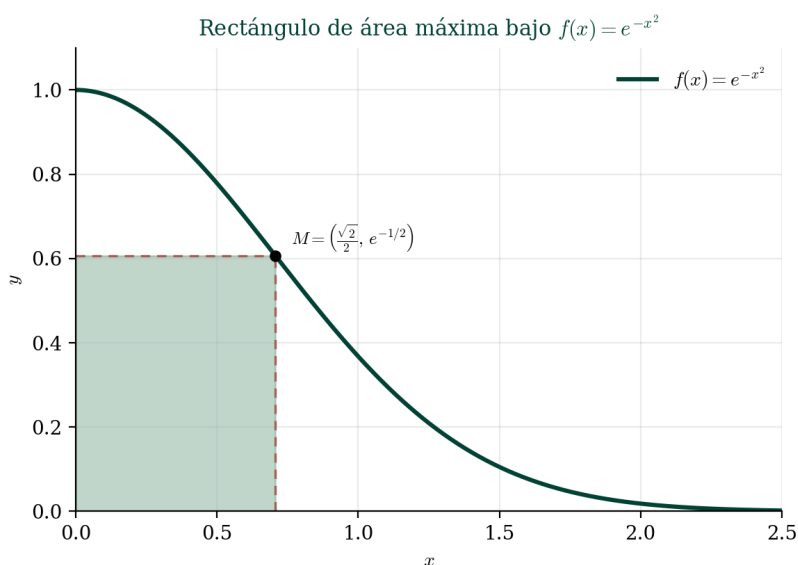
Como $e^{-x^2} > 0$ siempre, el signo de A' coincide con el signo de $1 - 2x^2$, que se anula en:

$$1 - 2x^2 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(descartamos la raíz negativa, ya que solo consideramos $x > 0$).

Idea clave

Para $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $1 - 2x^2 > 0$ ($A' > 0$, creciente); para $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $1 - 2x^2 < 0$ ($A' < 0$, decreciente). El cambio de signo de + a - confirma que se trata de un máximo.



El punto es $M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$, y el área máxima es:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2e}} \approx 0.4289.$$