

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Extraordinaria 2025

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

BLOQUE 1 (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2.5 puntos)

RESPONDA A UNA DE LAS DOS PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2.5 puntos)

Pregunta 1.1.**ENUNCIADO**

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k :

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k .

b (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

SOLUCIÓN

Reescribimos el sistema en su forma habitual $A\vec{v} = \vec{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}.$$

Apartado a)

Calculamos $|A|$ (por ejemplo, desarrollando por la primera fila o aplicando Sarrus):

$$|A| = k(k+1)^2.$$

Idea clave

Como siempre en la discusión de un sistema cuadrado, los únicos valores de k que requieren un estudio detallado son los que anulan $|A|$: aquí, $k = 0$ y $k = -1$.

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1$: $|A| \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 3 = n^\circ$ incógnitas. El sistema es **compatible determinado**.

Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las filas 2.^a y 3.^a de A son idénticas, así que $\text{rg}(A) = 2$. Como $\vec{b} = \vec{0}$, también $\text{rg}(A|\vec{b}) = 2$. Como $2 < 3 = n^\circ$ incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado**.

Si $k = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tomando el menor de las dos primeras filas y columnas, $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$ (ya sabíamos que no podía ser 3, pues $|A| = 0$). Añadiendo la columna de términos independientes, puede comprobarse que aparece un menor de orden 3 no nulo en $(A|\vec{b})$, por lo que $\text{rg}(A|\vec{b}) = 3$. Como los rangos no coinciden, el sistema es **incompatible**.

Apartado b)

Para $k = 0$, el sistema (compatible indeterminado) es

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

(la tercera ecuación es redundante). De la segunda, $x = -y$; de la primera, $z = -y$. Llamando $y = -t$ (para que la solución quede en la forma más simple):

$$(x, y, z) = (t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comprobación: sustituyendo en la primera ecuación del sistema original, $y + z = -t + t = 0$ ✓; en la segunda, $x + y = t - t = 0$ ✓.

Pregunta 1.2.**ENUNCIADO**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

a (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.

b (1 punto) Con la matriz $A_1 = A$, se consideran las matrices $A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025} .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Una matriz simétrica de orden 2 tiene la forma $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Calculamos primero $A + A^2$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A + A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Planteamos la ecuación matricial $BA = (A + A^2)B$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Desarrollando ambos lados obtenemos el sistema de 4 ecuaciones (una por cada entrada):

$$\begin{cases} a - b = -3a - 5b \\ 5a - 3b = -3b - 5c \\ b - c = a + b \\ 5b - 3c = b + c \end{cases}$$

Idea clave

No hace falta resolver las cuatro ecuaciones como si fueran independientes: dos de ellas resultan ser equivalentes entre sí (y con las otras dos), como suele ocurrir en estas ecuaciones matriciales 2×2 . Conviene simplificar cada una por separado antes de combinarlas.

La primera se simplifica a $4a + 4b = 0 \Rightarrow b = -a$. La tercera se simplifica a $-c = a \Rightarrow c = -a$. Sustituyendo en la segunda: $5a - 3(-a) = -3(-a) - 5(-a) \Rightarrow 5a + 3a = 3a + 5a$, identidad siempre cierta. La cuarta, con $b = -a$, $c = -a$: $5(-a) - 3(-a) = (-a) + (-a) \Rightarrow -2a = -2a$, también siempre cierta.

Por tanto, llamando $a = \lambda$, la solución es $b = -\lambda$, $c = -\lambda$:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Las matrices simétricas B que verifican la ecuación son $B = \lambda \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Apartado b)

Calculamos las primeras matrices de la sucesión:

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_1^2 + A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 = A_2^2 + A_2.$$

Calculamos A_2^2 :

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = A_1.$$

Idea clave

¡ $A_3 = A_1$! Esto significa que la sucesión es periódica con periodo 2: se repite indefinidamente $A_1, A_2, A_1, A_2, \dots$. En vez de calcular 2025 matrices, basta con identificar la paridad del índice.

Como $A_3 = A_1$, por la misma recurrencia $A_4 = A_2$, y en general $A_{2n-1} = A_1$ y $A_{2n} = A_2$ para todo $n \geq 1$. Como $2025 = 2(1013) - 1$ es impar,

$$A_{2025} = A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

BLOQUE 2 (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2.5 puntos)

ENUNCIADO

Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E . Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D .

¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

SOLUCIÓN

Llamamos $x = \overline{AB}$ e $y = \overline{AE}$. Como A, B, D, E forman un rectángulo recorrido en ese orden, los lados opuestos a AB y AE son, respectivamente, DE y BD : por tanto $DE = x$ y $BD = y$.

Idea clave

El lado BD del rectángulo no es un lado del pentágono (el pentágono “rodea” por fuera, pasando por C): en su lugar, el pentágono tiene los dos lados del triángulo equilátero, BC y CD , cada uno de longitud $BD = y$ (por ser el triángulo equilátero).

Perímetro. El perímetro del pentágono es

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = x + y + y + x + y = 2x + 3y = 120.$$

Despejando: $x = \frac{120 - 3y}{2}$. Para que $x > 0$ e $y > 0$, necesitamos $y \in (0, 40)$.

Área. El área del pentágono es la del rectángulo $ABDE$ más la del triángulo equilátero BCD (de lado y):

$$A_T(y) = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \frac{120-3y}{2} \cdot y + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = 60y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2, \quad y \in (0, 40).$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'_T(y) = 60 - \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)y = 0 \implies y_0 = \frac{60}{3 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{120}{6 - \sqrt{3}}.$$

Racionalizando (multiplicando por $\frac{6 + \sqrt{3}}{6 + \sqrt{3}}$):

$$y_0 = \frac{120(6 + \sqrt{3})}{36 - 3} = \frac{120(6 + \sqrt{3})}{33} = \frac{40}{11}(6 + \sqrt{3}) \approx 28.117.$$

Como $A''_T(y) = -\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx -2.13 < 0$ (constante), A_T es cóncava y y_0 es un **máximo**. Además, $y_0 \approx 28.12 \in (0, 40)$, dentro del dominio válido.

Con y_0 , calculamos $x_0 = \frac{120 - 3y_0}{2}$:

$$x_0 = \frac{60}{11}(5 - \sqrt{3}) \approx 17.825.$$

Para que la parcela tenga área máxima, el agricultor debe situar E a una distancia $y_0 = \frac{40}{11}(6 + \sqrt{3}) \approx 28.117$ metros de A , y B a una distancia $x_0 = \frac{60}{11}(5 - \sqrt{3}) \approx 17.825$ metros de A .

BLOQUE 3 (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2.5 puntos)

RESPONDA A UNA DE LAS DOS PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2.5 puntos)

Pregunta 3.1.

ENUNCIADO

Sean los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(2, -1, 0)$, $C(-2, 0, 3)$ y $D(2, -3, -1)$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}.$$

a (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.

b (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro $ABCD$ determinada por los puntos A , B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D .

c (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Formamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, -2, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, -1, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (1, -4, -3)$.

Idea clave

Cuatro puntos son coplanarios exactamente cuando los tres vectores que forman con uno de ellos como origen son linealmente dependientes, es decir, cuando su determinante es cero.

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3.$$

Como el determinante es $-3 \neq 0$, **los puntos no son coplanarios**. El volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}.$$

Apartado b)

El área de la cara ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de dos de sus lados:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = ((-2)(1) - (-2)(-1), (-2)(-3) - (1)(1), (1)(-1) - (-2)(-3)) = (-4, 5, -7).$$

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \|(-4, 5, -7)\| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 25 + 49} = \frac{1}{2} \sqrt{90} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Idea clave

El volumen de un tetraedro también puede escribirse como $\frac{1}{3} \cdot (\text{área de la base}) \cdot h$. Igualando esta fórmula con el volumen ya conocido, despejamos directamente la altura sin necesidad de más geometría.

Usando $V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(ABC) \cdot h$ con $V = \frac{1}{2}$ y $\text{Área}(ABC) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot h \implies h = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

El área de la cara ABC es $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ y la altura desde D es $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Apartado c)

La recta r tiene dirección $\vec{d}_r = (2, 1, -1)$ y pasa por $P_r(1, -1, 0)$. La recta BD tiene dirección $\overrightarrow{BD} = D - B = (0, -2, -1)$ y pasa por $B(2, -1, 0)$.

Idea clave

Antes de aplicar la fórmula de distancia entre rectas que se cruzan, hay que comprobar que efectivamente se cruzan (no son paralelas ni se cortan): esto se verifica viendo que $\vec{d}_r$ y $\overrightarrow{BD}$ no son proporcionales, y que el rango de los tres vectores $(\vec{d}_r, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{P_rB})$ es 3.

Como $\vec{d}_r = (2, 1, -1)$ y $\overrightarrow{BD} = (0, -2, -1)$ no son proporcionales, las rectas no son paralelas; puede comprobarse que tampoco se cortan, así que **se cruzan**.

La distancia entre dos rectas que se cruzan es

$$d(r, BD) = \frac{|\overrightarrow{P_rB} \cdot (\vec{d}_r \times \overrightarrow{BD})|}{\|\vec{d}_r \times \overrightarrow{BD}\|},$$

donde $\overrightarrow{P_rB} = B - P_r = (1, 0, 0)$.

Calculamos primero $\vec{d}_r \times \overrightarrow{BD}$:

$$\vec{d}_r \times \overrightarrow{BD} = (1 \cdot (-1) - (-1)(-2), (-1)(0) - 2(-1), 2(-2) - 1(0)) = (-3, 2, -4).$$

El producto mixto es

$$\overrightarrow{P_rB} \cdot (\vec{d}_r \times \overrightarrow{BD}) = (1, 0, 0) \cdot (-3, 2, -4) = -3.$$

$$d(r, BD) = \frac{|-3|}{\|(-3, 2, -4)\|} = \frac{3}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557.$$

La distancia entre r y BD es $\frac{3\sqrt{29}}{29} \approx 0.557$.

Pregunta 3.2.**ENUNCIADO**

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 0, 1)$, se pide:

a (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B .

b (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z = 1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Un plano es paralelo al eje OZ cuando su vector normal es perpendicular a la dirección de dicho eje, $(0, 0, 1)$: por eso basta con que el vector normal se obtenga como el producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ con $(0, 0, 1)$, garantizando ambas condiciones (contener a A, B y ser paralelo al eje) a la vez.

El vector $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$. El vector normal del plano buscado es

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0 \cdot 1 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) = (0, -1, 0).$$

El plano pasa por $A(0, 0, 1)$ con normal $(0, -1, 0)$:

$$-1 \cdot (y - 0) = 0 \implies y = 0.$$

El plano buscado es $y = 0$.

Apartado b)

Como A y B tienen ambos $z = 1$, están contenidos en el plano $z = 1$. Buscamos una recta s perpendicular a ese plano (dirección $\vec{v} = (0, 0, 1)$) que pase por un punto $P(x_0, y_0, 1)$ (también en el plano $z = 1$) tal que la distancia de s a A y a B sea, en ambos casos, igual a 1.

Idea clave

La distancia de un punto Q a una recta de dirección $\vec{v}$ que pasa por P es $\frac{\|\vec{v} \times \overrightarrow{PQ}\|}{\|\vec{v}\|}$. Como $\vec{v} = (0, 0, 1)$ es unitario, la fórmula se simplifica bastante.

$$\overrightarrow{PA} = (-x_0, -y_0, 0), \quad \vec{v} \times \overrightarrow{PA} = (0, 0, 1) \times (-x_0, -y_0, 0) = (y_0, -x_0, 0).$$

$$d(A, s) = \|(y_0, -x_0, 0)\| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 1 \implies x_0^2 + y_0^2 = 1. \quad (1)$$

Análogamente, con $\overrightarrow{PB} = (1 - x_0, -y_0, 0)$:

$$d(B, s) = \sqrt{(1 - x_0)^2 + y_0^2} = 1 \implies (1 - x_0)^2 + y_0^2 = 1. \quad (2)$$

Restando (2)–(1):

$$(1 - x_0)^2 - x_0^2 = 0 \implies 1 - 2x_0 = 0 \implies x_0 = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo en (1): $y_0^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \implies y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hay dos rectas válidas:

$$s_1 \equiv (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda\right), \quad s_2 \equiv (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

BLOQUE 4 (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2.5 puntos)

RESPONDA A UNA DE LAS DOS PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2.5 puntos)

Pregunta 4.1.

ENUNCIADO

En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

a (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.

b (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.

c (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población, calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

SOLUCIÓN

Sea X la masa de un hombre elegido al azar, $X \sim N(75.67, 11.05)$.

Apartado a)

Tipificamos ambos extremos:

$$Z_1 = \frac{60 - 75.67}{11.05} \approx -1.42, \quad Z_2 = \frac{80 - 75.67}{11.05} \approx 0.39.$$

$$P(60 \leq X \leq 80) = P(-1.42 \leq Z \leq 0.39) = P(Z \leq 0.39) - P(Z < -1.42).$$

Buscando en la tabla: $P(Z \leq 0.39) = 0.6517$; y por simetría, $P(Z < -1.42) = 1 - P(Z < 1.42) = 1 - 0.9222 = 0.0778$.

$$P(60 \leq X \leq 80) = 0.6517 - 0.0778 = 0.5739.$$

La probabilidad pedida es 0.5739.

Apartado b)

$$Z_3 = \frac{100 - 75.67}{11.05} \approx 2.20.$$

$$P(X > 100) = P(Z > 2.20) = 1 - P(Z < 2.20) = 1 - 0.9861 = 0.0139.$$

La probabilidad pedida es 0.0139.

Apartado c)

Sea T el número de hombres (de los 10 elegidos) con masa superior a 100 kg. Como los 10 son independientes y cada uno tiene probabilidad $p = 0.0139$ (del apartado anterior) de superar los 100 kg, $T \sim B(10, 0.0139)$.

Buscamos $P(T \leq 1) = P(T = 0) + P(T = 1)$:

$$P(T = 0) = (1 - 0.0139)^{10}, \quad P(T = 1) = \binom{10}{1}(0.0139)(1 - 0.0139)^9.$$

$$P(T \leq 1) \approx 0.8712 + 0.1207 = 0.9919.$$

La probabilidad de que no más de uno supere los 100 kg es, aproximadamente, 0.9919.

Pregunta 4.2.

ENUNCIADO

La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

a (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.

b (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

SOLUCIÓN

Denotamos LL = “día lluvioso” y $\overline{LL}$ = “día seco”, y C = “el corredor se cae” (con $\overline{C}$ = “el corredor no se cae”). Los datos son

$$P(C | LL) = 0.08, \quad P(C | \overline{LL}) = 0.004, \quad P(LL \cap C) = 0.032.$$

Apartado a)

Idea clave

Antes de aplicar la probabilidad total, nos falta $P(LL)$: se obtiene despejando de la regla del producto, ya que conocemos $P(LL \cap C)$ y $P(C | LL)$.

De $P(LL \cap C) = P(LL) \cdot P(C | LL)$:

$$P(LL) = \frac{P(LL \cap C)}{P(C | LL)} = \frac{0.032}{0.08} = 0.4, \quad P(\overline{LL}) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

Por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de *no* caerse es:

$$P(\overline{C}) = P(LL) \cdot P(\overline{C} | LL) + P(\overline{LL}) \cdot P(\overline{C} | \overline{LL}).$$

Como $P(\overline{C} | LL) = 1 - 0.08 = 0.92$ y $P(\overline{C} | \overline{LL}) = 1 - 0.004 = 0.996$:

$$P(\overline{C}) = 0.4 \cdot 0.92 + 0.6 \cdot 0.996 = 0.368 + 0.5976 = 0.9656.$$

La probabilidad de volver a casa sin caerse es 0.9656.

Apartado b)

Buscamos $P(\overline{LL} | C)$. Primero, $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0.9656 = 0.0344$.

Por la definición de probabilidad condicionada:

$$P(\overline{LL} \mid C) = \frac{P(\overline{LL} \cap C)}{P(C)}.$$

$$P(\overline{LL} \cap C) = P(\overline{LL}) \cdot P(C \mid \overline{LL}) = 0.6 \cdot 0.004 = 0.0024.$$

$$P(\overline{LL} \mid C) = \frac{0.0024}{0.0344} \approx 0.0698.$$

La probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo es, aproximadamente, 0.0698.