

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Andalucía -- Extraordinaria 2023

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad y Pruebas de Admisión – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Curso 2022–2023.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.
- c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Sea la función $f : [-2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

- a) [2 puntos] Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [0,5 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Estudiamos cada tramo por separado. En el tramo $[-2, 0]$, f es lineal ($5x + 1$, pendiente $5 > 0$): no tiene puntos críticos interiores, así que sus valores extremos en ese tramo están en los propios extremos del intervalo. En el tramo $(0, 2\pi]$ derivamos $e^x \cos(x)$ para buscar puntos críticos.

En $[-2, 0]$: $f(-2) = 5(-2) + 1 = -9$, $f(0) = 5(0) + 1 = 1$.

En $(0, 2\pi]$, derivamos:

$$f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x)).$$

Como $e^x > 0$ siempre, igualamos a cero el otro factor:

$$\cos(x) - \sin(x) = 0 \implies \tan(x) = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} \text{ o } x = \frac{5\pi}{4} \quad (\text{dentro de } (0, 2\pi]).$$

Estudiamos el signo de $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$ alrededor de estos puntos:

- En $x = \frac{\pi}{4}$: para x ligeramente menor, $\cos x > \sin x$ ($f' > 0$); para x ligeramente mayor, $\cos x < \sin x$ ($f' < 0$). Pasa de + a -: **máximo relativo**.
- En $x = \frac{5\pi}{4}$: para x ligeramente menor (por ejemplo, $x = \pi$), $\cos x - \sin x = -1 < 0$; para x ligeramente mayor (por ejemplo $x = \frac{3\pi}{2}$), $\cos x - \sin x = 1 > 0$. Pasa de - a +: **mínimo relativo**.

Calculamos los valores en estos puntos y en el extremo derecho del dominio:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} \approx 1,551.$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{5\pi/4} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4} \approx -35,889.$$

$$f(2\pi) = e^{2\pi} \cos(2\pi) = e^{2\pi} \approx 535,492.$$

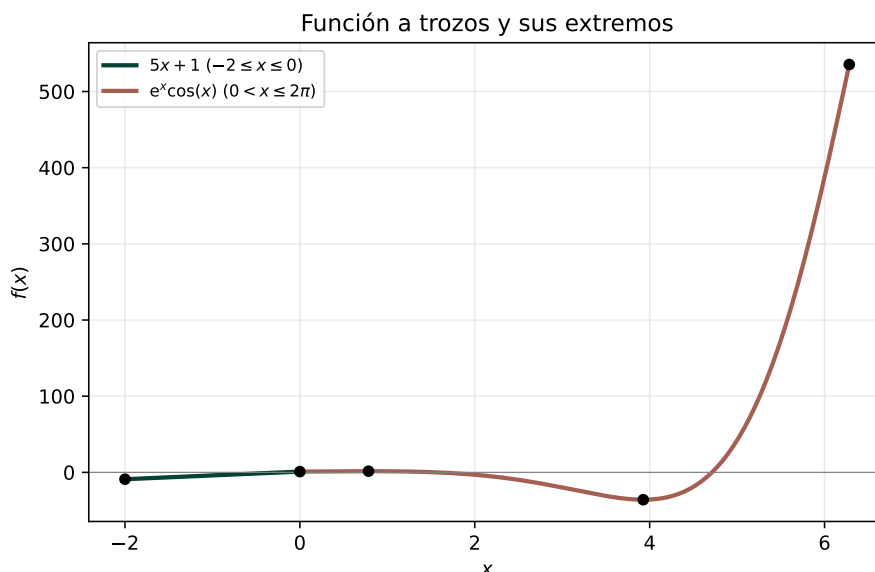
Idea clave

Al ser un dominio cerrado y acotado, f (continua) alcanza su máximo y su mínimo absolutos. Los candidatos son los puntos críticos interiores y los extremos del dominio: $x = -2, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, 2\pi$. Comparamos todos los valores obtenidos.

Comparando los cinco valores ($-9, 1, \approx 1,551, \approx -35,889, \approx 535,492$):

Extremos relativos: máximo relativo en $x = \frac{\pi}{4}$, valor $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi/4} \approx 1,551$; mínimo relativo en $x = \frac{5\pi}{4}$, valor $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4} \approx -35,889$.

Extremos absolutos: máximo absoluto en $x = 2\pi$, valor $e^{2\pi} \approx 535,492$ (el mayor de todos); mínimo absoluto en $x = \frac{5\pi}{4}$, valor $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{5\pi/4} \approx -35,889$ (el menor de todos, incluso por debajo de $f(-2) = -9$).

**Apartado b)**

Como $\frac{\pi}{2} \in (0, 2\pi]$, usamos la segunda rama. Calculamos:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \cdot 0 = 0.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \left(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2}(0 - 1) = -e^{\pi/2}.$$

La recta tangente pasa por $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ con pendiente $-e^{\pi/2}$:

$$y - 0 = -e^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \implies y = -e^{\pi/2}x + \frac{\pi}{2}e^{\pi/2}.$$

La recta tangente pedida es $y = -e^{\pi/2}x + \frac{\pi}{2}e^{\pi/2}$.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) [1,25 puntos] Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [1,25 puntos] Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Derivamos con la regla del producto:

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \cdot 2 \ln(x) \cdot \frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2 \ln(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2).$$

Iguamos a cero: $\ln(x) = 0 \implies x = 1$; o $\ln(x) = -2 \implies x = e^{-2}$.

Idea clave

Como $f'(x) = \ln(x)(\ln(x) + 2)$ es un producto de dos factores lineales en $\ln(x)$, su signo se estudia igual que una parábola en la variable $u = \ln(x)$: es positivo fuera de las raíces ($u < -2$ o $u > 0$) y negativo entre ellas ($-2 < u < 0$).

Traduciendo a x (recordando que $\ln$ es creciente): $f'(x) > 0$ si $x < e^{-2}$ o si $x > 1$; $f'(x) < 0$ si $e^{-2} < x < 1$.

Por tanto: en $x = e^{-2}$, f' pasa de $+$ a $-$ (**máximo relativo**); en $x = 1$, f' pasa de $-$ a $+$ (**mínimo relativo**).

Calculamos los valores:

$$f(e^{-2}) = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2} \approx 0,541.$$

$$f(1) = 1 \cdot (\ln 1)^2 = 1 \cdot 0 = 0.$$

Máximo relativo en $x = e^{-2}$, valor $4e^{-2} \approx 0,541$. Mínimo relativo en $x = 1$, valor 0.

Apartado b)

Idea clave

Para los extremos absolutos en un dominio no acotado, estudiamos el comportamiento de f en los bordes del dominio: $x \rightarrow 0^+$ y $x \rightarrow +\infty$. Además, como $x > 0$ y $(\ln x)^2 \geq 0$ siempre, tenemos $f(x) \geq 0$ para todo x del dominio, con igualdad exactamente en $x = 1$.

Calculamos los límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^2 = 0 \quad (\text{el factor } x \text{ domina sobre } (\ln x)^2 \rightarrow \infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty.$$

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ y $f(1) = 0$ se alcanza efectivamente (con $x = 1$ en el dominio), el valor 0 es el mínimo absoluto. En cambio, como $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$, la función no está acotada superiormente.

Existe mínimo absoluto en $x = 1$, con valor 0. No existe máximo absoluto (la función no está acotada superiormente).

EJERCICIO 3 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + 2 = 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

SOLUCIÓN

Idea clave

La integral $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ es inmediata reconociendo que $\frac{\ln(x)}{x}$ es, salvo constante, la derivada de

$$(\ln x)^2: \text{ en efecto, } \frac{d}{dx} \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right] = \ln(x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Por tanto, una primitiva es:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

Evaluamos la integral definida:

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_a^1 = \frac{(\ln 1)^2}{2} - \frac{(\ln a)^2}{2} = 0 - \frac{(\ln a)^2}{2} = -\frac{(\ln a)^2}{2}.$$

Sustituimos en la ecuación del enunciado:

$$-\frac{(\ln a)^2}{2} + 2 = 0 \implies \frac{(\ln a)^2}{2} = 2 \implies (\ln a)^2 = 4 \implies \ln(a) = \pm 2.$$

Idea clave

Como se exige $0 < a < 1$, sabemos que $\ln(a)$ debe ser negativo (el logaritmo neperiano de cualquier número entre 0 y 1 es negativo). Esto descarta la solución $\ln(a) = 2$.

Descartamos $\ln(a) = 2$ (daría $a = e^2 > 1$, fuera del rango pedido) y nos quedamos con:

$$\ln(a) = -2 \implies a = e^{-2}.$$

El valor pedido es $a = e^{-2} \approx 0,135$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

- [1,25 puntos] Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.
- [1,25 puntos] Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Iguamos $f(x) = g(x)$:

$$5 - x^2 = \frac{4}{x^2}.$$

Multiplicamos por x^2 (válido porque $x \neq 0$):

$$5x^2 - x^4 = 4 \implies x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Idea clave

Esta es una ecuación bicuadrada: el cambio $u = x^2$ la convierte en una ecuación de segundo grado.

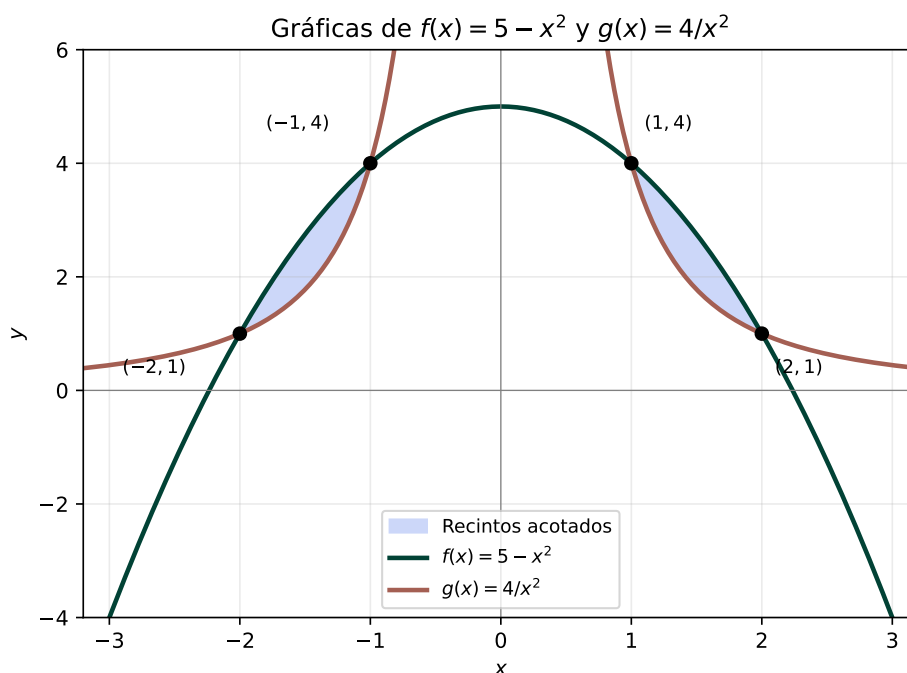
Con $u = x^2$:

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \implies (u - 1)(u - 4) = 0 \implies u = 1 \text{ o } u = 4.$$

Deshacemos el cambio: $x^2 = 1 \implies x = \pm 1$; $x^2 = 4 \implies x = \pm 2$.

Calculamos las ordenadas: $f(\pm 1) = 5 - 1 = 4$; $f(\pm 2) = 5 - 4 = 1$.

Los puntos de corte son $(-2, 1)$, $(-1, 4)$, $(1, 4)$ y $(2, 1)$.



Apartado b)

Idea clave

Entre $x = -1$ y $x = 1$ (sin incluir $x = 0$, donde g no está definida), $g(x) = 4/x^2 \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow 0$, mientras que f permanece acotada. Por tanto, la región entre las curvas en ese tramo central NO es un recinto limitado (tiene área infinita) y no debe incluirse en el cálculo. Los únicos recintos realmente limitados son los que quedan entre $x = 1$ y $x = 2$ (y, por simetría, entre $x = -2$ y $x = -1$, ya que ambas funciones son pares).

Comprobamos el orden de las curvas en $(1, 2)$: en $x = 1,5$, $f(1,5) = 5 - 2,25 = 2,75$ y $g(1,5) = 4/2,25 \approx 1,778$, así que $f > g$ en ese tramo.

Calculamos el área en $(1, 2)$:

$$\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^2 \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx = \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_1^2.$$

Evaluamos:

$$\left(10 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(5 - \frac{1}{3} + 4\right) = \left(12 - \frac{8}{3}\right) - \left(9 - \frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} - \frac{26}{3} = \frac{2}{3}.$$

Como f y g son ambas funciones pares, el recinto en $(-2, -1)$ tiene exactamente la misma área, $\frac{2}{3}$.

$$\text{Suma de áreas} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

La suma de las áreas de los recintos limitados es $\frac{4}{3} u^2 \approx 1,33 u^2$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

- a) [1 punto] Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.
- b) [1,5 puntos] Halla x , distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

$A - mI$ no tiene inversa exactamente cuando $\det(A - mI) = 0$.

$$A - mI = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante. Sumamos todas las filas a la primera (esto no cambia el determinante):

$$F_1 \rightarrow F_1 + F_2 + F_3 : \quad (1 - m + 1 + 1, 1 + 1 - m + 1, 1 + 1 + 1 - m) = (3 - m, 3 - m, 3 - m).$$

Idea clave

Al sacar factor común $(3 - m)$ de la primera fila (que ahora tiene sus tres entradas iguales), el determinante se simplifica notablemente.

$$\det(A - mI) = (3 - m) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix}.$$

En este nuevo determinante, restamos la primera fila a la segunda y a la tercera ($F_2 \rightarrow F_2 - F_1, F_3 \rightarrow F_3 - F_1$),

lo que no cambia el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = 1 \cdot (-m)(-m) = m^2.$$

Por tanto:

$$\det(A - mI) = (3 - m)m^2.$$

Igualamos a cero: $(3 - m)m^2 = 0 \implies m = 0$ o $m = 3$.

$A - mI$ no tiene inversa para $m = 0$ y para $m = 3$.

Apartado b)

Idea clave

“ $A - xI$ es la inversa de $\frac{1}{x}(A - I)$ ” significa, por definición de matriz inversa, que su producto es la identidad: $(A - xI) \cdot \frac{1}{x}(A - I) = I$, es decir, $(A - xI)(A - I) = xI$.

Desarrollamos el producto $(A - xI)(A - I)$:

$$(A - xI)(A - I) = A^2 - A - xA + xI = A^2 - (1 + x)A + xI.$$

Idea clave

Como A es la matriz de unos 3×3 , cada entrada de A^2 es la suma de 3 productos de unos: $A_{ij}^2 = \sum_k A_{ik}A_{kj} = 1 + 1 + 1 = 3$. Por tanto, $A^2 = 3A$: toda potencia de A se reduce a un múltiplo de la propia A .

Sustituyendo $A^2 = 3A$:

$$(A - xI)(A - I) = 3A - (1 + x)A + xI = (3 - 1 - x)A + xI = (2 - x)A + xI.$$

Igualamos a xI (la condición del enunciado):

$$(2 - x)A + xI = xI \implies (2 - x)A = 0.$$

Como $A \neq O$ (matriz nula), la única forma de que $(2 - x)A = O$ es que el escalar se anule:

$$2 - x = 0 \implies x = 2.$$

El valor pedido es $x = 2$.

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6 %, el 12 %

y el 30 %, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

SOLUCIÓN

Llamamos R , C , V a los importes (sin impuestos) gastados en refrescos, cerveza y vino, respectivamente.

$$R + C + V = 500, \quad V = (R + C) - 60, \quad 1,06R + 1,12C + 1,30V = 592,4.$$

Idea clave

La segunda ecuación relaciona V con $R + C$; sustituyéndola en la primera podemos despejar $R + C$ y V directamente, sin necesidad de resolver aún el sistema completo.

Sustituimos $V = (R + C) - 60$ en la primera ecuación:

$$(R + C) + [(R + C) - 60] = 500 \implies 2(R + C) = 560 \implies R + C = 280.$$

Entonces:

$$V = 280 - 60 = 220.$$

Sustituimos $V = 220$ en la tercera ecuación:

$$1,06R + 1,12C + 1,30(220) = 592,4 \implies 1,06R + 1,12C = 592,4 - 286 = 306,4.$$

Usamos $C = 280 - R$:

$$1,06R + 1,12(280 - R) = 306,4 \implies 1,06R + 313,6 - 1,12R = 306,4 \implies -0,06R = -7,2 \implies R = 120.$$

Entonces:

$$C = 280 - 120 = 160.$$

Comprobación (sin impuestos): $120 + 160 + 220 = 500$ ✓; $220 = (120 + 160) - 60 = 280 - 60 = 220$ ✓.

Calculamos ahora los importes **con impuestos**:

$$R_{\text{con IVA}} = 1,06(120) = 127,2, \quad C_{\text{con IVA}} = 1,12(160) = 179,2, \quad V_{\text{con IVA}} = 1,30(220) = 286.$$

Comprobación: $127,2 + 179,2 + 286 = 592,4$ ✓.

El importe con impuestos fue: 127,2€ en refrescos, 179,2€ en cerveza y 286€ en vino.

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

a) [1,5 puntos] Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto $P(2, 6, -2)$.

b) [1 punto] Halla el ángulo que forman π_1 y π_2 .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Los vectores normales de los planos son $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$. La dirección de la recta intersección es:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ((-1)(0) - 1(1), -[1(0) - 1(1)], 1(1) - (-1)(1)) = (-1, 1, 2).$$

Buscamos un punto de la recta: tomando $z = 0$, el sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ da $x = 1, y = 1$. El punto es $Q_0 = (1, 1, 0)$.

Idea clave

Para hallar la distancia de un punto a una recta en el espacio, usamos $d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{Q_0P} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$.

Calculamos $\overrightarrow{Q_0P} = P - Q_0 = (1, 5, -2)$.

$$\overrightarrow{Q_0P} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5(2) - (-2)(1), -[1(2) - (-2)(-1)], 1(1) - 5(-1)) = (12, 0, 6).$$

$$\|\overrightarrow{Q_0P} \times \vec{d}\| = \sqrt{144 + 0 + 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}, \quad \|\vec{d}\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$

$$d(P, r) = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = 6\sqrt{\frac{5}{6}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{30}}{6} = \sqrt{30}.$$

La distancia pedida es $\sqrt{30} \approx 5,48$.

Apartado b)**Idea clave**

El ángulo entre dos planos coincide con el ángulo (agudo) entre sus vectores normales.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Calculamos:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (1)(1) + (-1)(1) + (1)(0) = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Como el producto escalar de las normales es cero, los vectores son perpendiculares:

$$\cos(\alpha) = 0 \implies \alpha = 90^\circ.$$

Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares: el ángulo que forman es 90° .

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos $A(0, 2, -2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 3, 2)$ con los planos cartesianos.

SOLUCIÓN

Calculamos dos vectores del plano:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0, 3), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (2, 1, 4).$$

El vector normal es:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (0(4) - 3(1), -[3(4) - 3(2)], 3(1) - 0(2)) = (-3, -6, 3).$$

La ecuación del plano, usando el punto $A(0, 2, -2)$:

$$-3(x - 0) - 6(y - 2) + 3(z + 2) = 0 \implies -3x - 6y + 12 + 3z + 6 = 0 \implies -3x - 6y + 3z + 18 = 0.$$

Dividiendo entre -3 :

$$x + 2y - z - 6 = 0 \implies x + 2y - z = 6.$$

Comprobación: $A(0, 2, -2)$: $0 + 4 + 2 = 6$ ✓; $B(3, 2, 1)$: $3 + 4 - 1 = 6$ ✓; $C(2, 3, 2)$: $2 + 6 - 2 = 6$ ✓.

Idea clave

Los puntos de corte con los ejes cartesianos son los vértices del tetraedro junto con el origen. Para cada eje, hacemos cero las otras dos variables en la ecuación del plano.

Calculamos los cortes con los ejes:

Eje X ($y = z = 0$) : $x = 6$. Eje Y ($x = z = 0$) : $2y = 6 \implies y = 3$. Eje Z ($x = y = 0$) : $-z = 6 \implies z = -6$.

Idea clave

El volumen del tetraedro formado por el origen y los tres puntos de corte con los ejes, cuando el plano es $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$, es $V = \frac{|pqr|}{6}$ (los tres vectores desde el origen a los puntos de corte son ortogonales entre sí, como los catetos de un triedro rectángulo).

$$V = \frac{1}{6} |6 \cdot 3 \cdot (-6)| = \frac{1}{6} \cdot 108 = 18.$$

El volumen del tetraedro es 18 u^3 .