

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Ordinaria 2022

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las **ocho** que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: la valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Tiempo: 90 minutos.

Idea clave

Mismo formato que los exámenes anteriores de esta serie: resolvemos las ocho preguntas (A.1–A.4 y B.1–B.4).

PREGUNTA A.1: Sistemas de ecuaciones con parámetro (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m :

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1, \end{cases}$$

a (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m .

b (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante:

$$|A| = 2m^2 + m - 1 = 2(m+1)\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

Igualamos a cero: $m = -1$ o $m = \frac{1}{2}$.

Si $m \neq -1$ y $m \neq \frac{1}{2}$: $|A| \neq 0$, el sistema es **compatible determinado**.

Si $m = -1$: puede comprobarse que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 2 < 3$: el sistema es **compatible indeterminado**.

Si $m = \frac{1}{2}$: igualmente $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 2 < 3$: el sistema también es **compatible indeterminado**.

Apartado b)

Para $m = \frac{1}{2}$, el sistema es

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

Idea clave

La primera y la tercera ecuación son idénticas: el sistema se reduce en realidad a solo dos ecuaciones independientes.

Nos quedan las ecuaciones $x - y + z = 1$ y $\frac{1}{2}x + 2y - z = -1$. Sumándolas: $\frac{3}{2}x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$.

Llamando $x = \lambda$: $y = -\frac{3}{2}\lambda$; de la primera ecuación, $z = 1 - x + y = 1 - \lambda - \frac{3}{2}\lambda = 1 - \frac{5}{2}\lambda$.

Idea clave

Aunque esta parametrización es válida, resulta más elegante reescribir la solución tomando como parámetro libre y en vez de x , para que los coeficientes queden en fracciones más simples.

Tomando $y = \lambda$ como parámetro (equivalentemente, $x = -\frac{2}{3}\lambda$):

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3}\lambda, \lambda, 1 + \frac{5}{3}\lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Comprobación: con $\lambda = 1$: $(x, y, z) = (-2/3, 1, 8/3)$. Sustituyendo en $x - y + z$: $-2/3 - 1 + 8/3 = 6/3 - 1 = 1$ ✓.

PREGUNTA A.2: Análisis: continuidad, derivabilidad y simetría (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b (0.5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx$.

SOLUCIÓN**Apartado a)****Idea clave**

Cuando $x \rightarrow 0$, el factor $e^{-1/x^2} \rightarrow 0$ mucho más rápido de lo que $x^3 \rightarrow \infty$ podría compensar (es una exponencial decayendo más rápido que cualquier potencia): por eso el límite es 0, igual que $f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 e^{-1/x^2} = 0 = f(0).$$

f es continua en $x = 0$.

Para la derivabilidad, calculamos el límite del cociente incremental:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 e^{-1/h^2} = 0.$$

f es derivable en $x = 0$, con $f'(0) = 0$.

Apartado b)

$$f(-x) = (-x)^3 e^{-1/(-x)^2} = -x^3 e^{-1/x^2} = -f(x).$$

f presenta simetría impar.

Apartado c)

Idea clave

Antes de integrar, simplificamos el integrando: $\frac{f(x)}{x^6} = \frac{x^3 e^{-1/x^2}}{x^6} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$, que tiene una primitiva inmediata si reconocemos la derivada de e^{-1/x^2} .

$$\frac{d}{dx} (e^{-1/x^2}) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3},$$

así que

$$\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx = \frac{1}{2} e^{-1/x^2} + C.$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx = \left[\frac{1}{2} e^{-1/x^2} \right]_1^2 = \frac{1}{2} e^{-1/4} - \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2} (e^{-1/4} - e^{-1}).$$

El valor de la integral es $\frac{1}{2} (e^{-1/4} - e^{-1})$.

PREGUNTA A.3: Geometría del espacio (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1, 1, 1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula

que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90. \end{cases}$

a (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Parametrizamos r tomando $x = t$: de $2x - y = 10$, $y = 2t - 10$; de $x - z = -90$, $z = t + 90$:

$$r \equiv (x, y, z) = (t, 2t - 10, t + 90).$$

El vector director es (derivando respecto a t , o restando los coeficientes): $\vec{u} = (1, 2, 1)$.

Para hallar dónde r incide en $z = 0$: $t + 90 = 0 \Rightarrow t = -90$.

El vector director es $\vec{u} = (1, 2, 1)$, y la partícula incide con $z = 0$ en el punto $(-90, -190, 0)$.

Apartado b)

Idea clave

La posición más próxima de la trayectoria al láser P es el pie de la perpendicular desde P a r : se halla como la intersección de r con el plano perpendicular a r que pasa por P .

El plano perpendicular a r (normal $\vec{u} = (1, 2, 1)$) que pasa por $P(1, 1, 1)$ es

$$1(x - 1) + 2(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \Rightarrow x + 2y + z - 4 = 0.$$

Sustituimos la parametrización de r :

$$t + 2(2t - 10) + (t + 90) - 4 = 0 \Rightarrow t + 4t - 20 + t + 90 - 4 = 0 \Rightarrow 6t + 66 = 0 \Rightarrow t = -11.$$

La posición más próxima es $Q = (-11, -32, 79)$.

Apartado c)

El plano $x + y = 2$ tiene normal $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

Idea clave

El ángulo entre una recta y un plano se relaciona con el ángulo entre la recta y la normal del plano mediante $\theta_{\text{recta-plano}} = \frac{\pi}{2} - \theta_{\text{recta-normal}}$ (son ángulos complementarios).

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{|1 + 2 + 0|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esto corresponde a un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (ya que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$). Por tanto, el ángulo entre la recta y el plano es

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

El ángulo pedido es $\frac{\pi}{3}$ radianes (60°).

PREGUNTA A.4: Probabilidad: binomial y aproximación normal (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros.

a (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

SOLUCIÓN

Sea X el número de mujeres entre los 10 consejeros, $X \sim B(10, 0.277)$.

Apartado a)

“La mitad” de 10 es 5:

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} (0.277)^5 (0.723)^5 \approx 0.0812.$$

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.0812.

Apartado b)

Idea clave

“Al menos un hombre” es el complementario de “todas mujeres” ($X = 10$).

$$P(X < 10) = 1 - P(X = 10) = 1 - (0.277)^{10} \approx 1 - 0.0000027 = 0.999997.$$

La probabilidad pedida es, prácticamente, 1 (concretamente, ≈ 0.999997).

Apartado c)

Sea Y el número de mujeres entre 200 consejeros, $Y \sim B(200, 0.277)$. Como $np = 200(0.277) = 55.4 > 5$, aproximamos por una normal:

$$Y' \sim N(\mu, \sigma), \quad \mu = 55.4, \quad \sigma = \sqrt{200(0.277)(0.723)} \approx 6.33.$$

“Al menos un 35 % de 200” significa al menos $0.35(200) = 70$ mujeres: buscamos $P(Y \geq 70)$.

Idea clave

Aplicamos la corrección por continuidad: $P(Y \geq 70)$ se aproxima por $P(Y' \geq 69.5)$.

$$P(Y \geq 70) \approx P(Y' \geq 69.5) = P\left(Z \geq \frac{69.5 - 55.4}{6.33}\right) = P(Z \geq 2.23).$$

Buscando en la tabla: $P(Z < 2.23) = 0.9871$, así que $P(Z \geq 2.23) = 1 - 0.9871 = 0.0129$.

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.0129.

PREGUNTA B.1: Sistemas de ecuaciones: problema de reparto (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio la diferencia entre lo que recibe Pablo y lo que recibe Alicia es de 420 euros, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

SOLUCIÓN

Llamamos x , y , z a las edades de Pablo, Alejandro y Alicia, respectivamente.

Idea clave

Como el reparto es directamente proporcional a la edad, cada euro por año es el mismo para los tres: si k es esa constante de proporcionalidad (euros por año), la parte de cada uno es k veces su edad, y $k = \frac{9450}{45}$ (el premio total entre la suma de las edades).

Primera condición. “La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia”:

$$x + y = 2z + 3 \implies x + y - 2z = 3.$$

Segunda condición. “La edad de los tres juntos es 45”:

$$x + y + z = 45.$$

Tercera condición. Cada uno recibe $k \cdot (\text{su edad})$ euros, con $k = \frac{9450}{45} = 210$ €/año. La diferencia entre lo de Pablo y lo de Alicia es 420:

$$210x - 210z = 420 \implies x - z = 2.$$

El sistema es

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - z = 2. \end{cases}$$

Restando la 2.^a de la 1.^a: $3z = 42 \implies z = 14$. De la 3.^a: $x = z + 2 = 16$. De la 1.^a: $y = 45 - x - z = 45 - 16 - 14 = 15$.

Comprobación: $16 + 15 - 2(14) = 31 - 28 = 3$ ✓; $16 - 14 = 2$ ✓.

Los repartos son $210x = 210(16) = 3360$, $210y = 210(15) = 3150$, $210z = 210(14) = 2940$ euros (y suman $3360 + 3150 + 2940 = 9450$ ✓).

Pablo tiene 16 años y recibe 3360 €; Alejandro tiene 15 años y recibe 3150 €; Alicia tiene 14 años y recibe 2940 €.

PREGUNTA B.2: Análisis: Bolzano, extremos y área (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

a (0.5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1, 1]$.

b (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

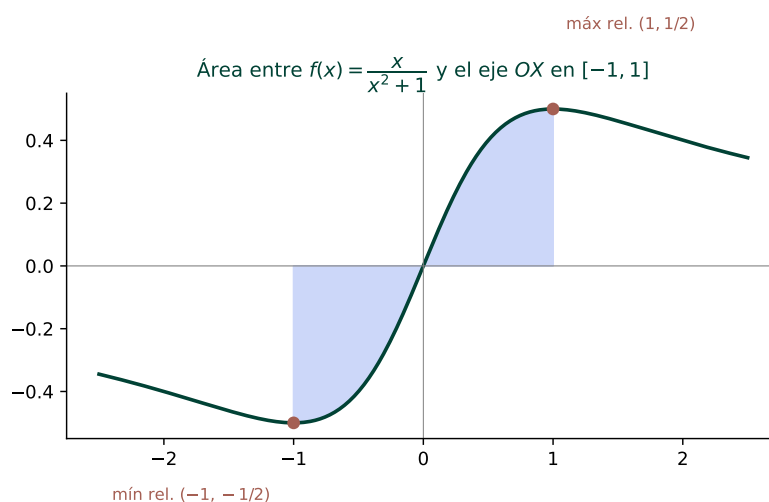
SOLUCIÓN

Figura 1: Extremos relativos de $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ y área respecto al eje OX en $[-1, 1]$.

Apartado a)

f es continua en $[-1, 1]$ (cociente de polinomios con denominador $x^2 + 1$ que nunca se anula). Evaluamos en los extremos:

$$f(-1) = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} < 0, \quad f(1) = \frac{1}{2} > 0.$$

Como f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1)$ y $f(1)$ tienen signos opuestos, f verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano (y, en efecto, existe una raíz en $x = 0$).

Apartado b)

Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Igualamos a cero: $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$.

Idea clave

El denominador $(x^2 + 1)^2$ es siempre positivo, así que el signo de f' coincide con el de $1 - x^2$: positivo entre -1 y 1 , negativo fuera.

En $x = -1$: f' pasa de negativa (en $(-\infty, -1)$) a positiva (en $(-1, 1)$) $\Rightarrow$ **mínimo relativo**, $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

En $x = 1$: f' pasa de positiva a negativa (en $(1, \infty)$) $\Rightarrow$ **máximo relativo**, $f(1) = \frac{1}{2}$.

Apartado c)

Como f es impar (se comprueba fácilmente: $f(-x) = -f(x)$) y $f(x) < 0$ en $(-1, 0)$, $f(x) > 0$ en $(0, 1)$, el área es

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 [-f(x)] dx + \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$$

(por la simetría impar, ambas piezas valen lo mismo).

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - 0 = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$\text{Área} = 2 \cdot \frac{\ln 2}{2} = \ln 2.$$

El área es $\ln 2$ (unidades cuadradas).

PREGUNTA B.3: Geometría del espacio: rectas paralelas y cuadrado (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$ y el punto $P(0, 1, 0)$.

a (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1 .

c (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2 , que pase por P y sea paralela a r_1 . Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2 .

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Sustituimos la parametrización de r_1 en π :

$$(1 + \lambda) + (1 - \lambda) + (-1) = 1, \quad \text{para todo } \lambda.$$

r_1 está contenida en π .

Sustituimos $P(0, 1, 0)$ en π : $0 + 1 + 0 = 1$. P pertenece a π .

Apartado b)

La recta r_1 tiene dirección $\vec{d}_{r_1} = (1, -1, 0)$.

Idea clave

La recta buscada, contenida en π y perpendicular a r_1 , es la intersección de π con un segundo plano que tenga a $\vec{d}_{r_1}$ como vector normal y pase por P .

El plano con normal $(1, -1, 0)$ que pasa por $P(0, 1, 0)$ es $x - y = D$, con $D = 0 - 1 = -1$: $x - y = -1$.

La recta buscada es $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y = -1. \end{cases}$

Apartado c)

Como r_2 es paralela a r_1 , tiene la misma dirección $(1, -1, 0)$, y pasa por $P(0, 1, 0)$:

$$r_2 \equiv (x, y, z) = (\lambda, 1 - \lambda, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Idea clave

Si el cuadrado tiene dos lados sobre r_1 y r_2 (rectas paralelas), la longitud de esos lados es exactamente la distancia entre las dos rectas: el área del cuadrado es esa distancia al cuadrado.

Calculamos $d(P, r_1)$. Tomamos un punto de r_1 , $P_{r_1} = (1, 1, -1)$, y el vector $\overrightarrow{P_{r_1}P} = (-1, 0, 1)$. La distancia es

$$d(P, r_1) = \frac{\|\overrightarrow{P_{r_1}P} \times \vec{d}_{r_1}\|}{\|\vec{d}_{r_1}\|}.$$

$$\overrightarrow{P_{r_1}P} \times \vec{d}_{r_1} = (-1, 0, 1) \times (1, -1, 0) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0, (-1)(-1) - 0 \cdot 1) = (1, 1, 1).$$

$$d(P, r_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

El área del cuadrado es $d(P, r_1)^2 = \frac{3}{2}$.

PREGUNTA B.4: Probabilidad: sombreros y pañuelos (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

b (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido

de cuadros.

SOLUCIÓN

Denotamos con dos letras cada suceso elemental: la primera indica el color del sombrero (B =blanco, N =negro) y la segunda el tipo de pañuelo (b =blanco, n =negro, c =cuadros). Los seis sucesos Bb , Bn , Bc , Nb , Nn , Nc son incompatibles entre sí y cubren todo el espacio muestral.

$$P(B) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad P(N) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$P(b | B) = \frac{2}{9}, \quad P(n | B) = \frac{2}{9}, \quad P(c | B) = \frac{5}{9}; \quad P(b | N) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, \quad P(n | N) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(c | N) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Apartado a)

Idea clave

“Aparece un color que no es el del sombrero” es el complementario de “coinciden los colores”, es decir, el complementario de $Bb \cup Nn$ (sombrero blanco y pañuelo puramente blanco, o sombrero negro y pañuelo puramente negro). El pañuelo de cuadros cuenta como “aparece un color distinto”, porque contiene el color contrario al del sombrero.

$$P(Bb) = P(B) P(b | B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{27}, \quad P(Nn) = P(N) P(n | N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

$$P(Bb \cup Nn) = P(Bb) + P(Nn) = \frac{4}{27} + \frac{2}{15}.$$

Con denominador común 135: $\frac{4}{27} = \frac{20}{135}$, $\frac{2}{15} = \frac{18}{135}$, suma = $\frac{38}{135}$.

$$P(\text{color distinto}) = 1 - \frac{38}{135} = \frac{97}{135}.$$

La probabilidad pedida es $\frac{97}{135}$.

Apartado b)

Idea clave

“Al menos uno de los dos complementos es negro” es el complementario de “ambos son blancos” (sombrero blanco Y pañuelo blanco), es decir, el complementario de Bb .

$$P(\text{al menos un negro}) = 1 - P(Bb) = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}.$$

La probabilidad pedida es $\frac{23}{27}$.

Apartado c)

Buscamos $P(N | c)$, donde c es el suceso “el pañuelo es de cuadros”. Por la regla de Bayes:

$$P(N | c) = \frac{P(Nc)}{P(Bc) + P(Nc)}.$$

$$P(Bc) = P(B) P(c | B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{27}, \quad P(Nc) = P(N) P(c | N) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

Con denominador común 135: $\frac{10}{27} = \frac{50}{135}$, $\frac{2}{15} = \frac{18}{135}$, suma = $\frac{68}{135}$.

$$P(N | c) = \frac{18/135}{68/135} = \frac{18}{68} = \frac{9}{34}.$$

La probabilidad pedida es $\frac{9}{34}$.