

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Ordinaria 2023

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las **ocho** que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

Idea clave

Mismo formato que los dos exámenes anteriores de esta serie: resolvemos las ocho preguntas (A.1–A.4 y B.1–B.4), ya que el alumno puede elegir cualquier combinación de cuatro.

PREGUNTA A.1: Sistemas de ecuaciones (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A , B y C . Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B , de 24 toneladas y los de tipo C , de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

SOLUCIÓN

Llamamos a , b , c al número de camiones de tipo A , B y C , respectivamente.

Idea clave

Como siempre en estos problemas, traducimos cada frase a una ecuación antes de tocar nada.

Primera condición. “Un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes” (B y C):

$$a + 1 = b + c.$$

Segunda condición. La capacidad total de los camiones tipo B es $24b$; el 10 % de esa cantidad es $2.4b$. Los de mayor tonelaje son los tipo C (28 t), con capacidad total $28c$; un séptimo de ella es $4c$:

$$2.4b = 4c.$$

Tercera condición. La tierra total transportada (capacidad $\times$ número de camiones de cada tipo) es 302 toneladas:

$$14a + 24b + 28c = 302.$$

El sistema a resolver es

$$\begin{cases} a - b - c = -1 \\ 2.4b - 4c = 0 \\ 14a + 24b + 28c = 302. \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $b = \frac{4}{2.4}c = \frac{5}{3}c$. Sustituyendo en la primera: $a = b + c - 1 = \frac{5}{3}c + c - 1 = \frac{8}{3}c - 1$.

Sustituyendo ambas en la tercera:

$$14\left(\frac{8}{3}c - 1\right) + 24\left(\frac{5}{3}c\right) + 28c = 302 \implies \frac{112}{3}c - 14 + 40c + 28c = 302.$$

Multiplicando todo por 3:

$$112c - 42 + 120c + 84c = 906 \implies 316c = 948 \implies c = 3.$$

Con $c = 3$: $b = \frac{5}{3}(3) = 5$, $a = \frac{8}{3}(3) - 1 = 8 - 1 = 7$.

Comprobación: $7 + 1 = 8 = 5 + 3$ ✓; $2.4(5) = 12 = 4(3)$ ✓; $14(7) + 24(5) + 28(3) = 98 + 120 + 84 = 302$ ✓.

Las toneladas transportadas por cada tipo son:

$$\text{Tipo A : } 14(7) = 98 \text{ t,} \quad \text{Tipo B : } 24(5) = 120 \text{ t,} \quad \text{Tipo C : } 28(3) = 84 \text{ t.}$$

Los camiones tipo A transportaron 98 t, los tipo B, 120 t, y los tipo C, 84 t.

PREGUNTA A.2: Análisis: paridad, derivabilidad y extremos (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$, se pide:

- a (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
- b (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.
- c (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

SOLUCIÓN

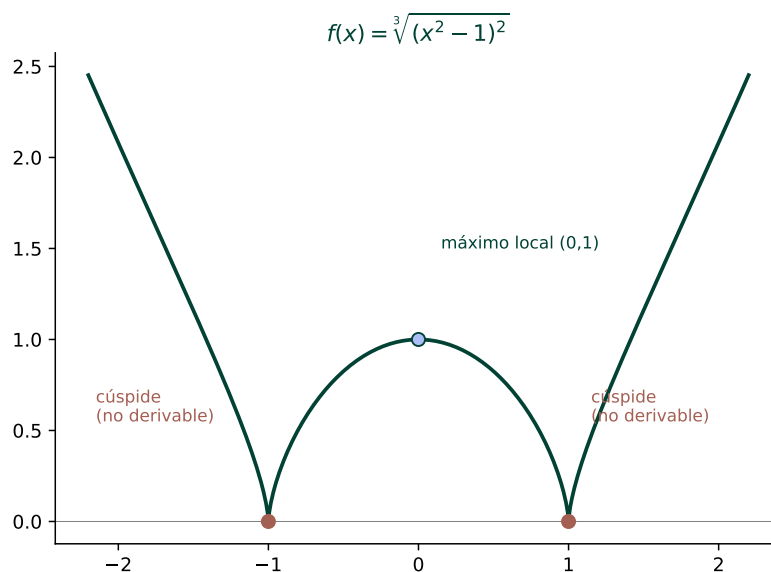


Figura 1: Gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$: cúspides en $x = \pm 1$ y máximo local en $(0, 1)$.

Apartado a)

$$f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2 - 1)^2} = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = f(x).$$

f es par.

Apartado b)

Escribimos $f(x) = [(x^2 - 1)^2]^{1/3}$ y derivamos con la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x^2 - 1)^2]^{-2/3} \cdot 2(x^2 - 1)(2x) = \frac{4x(x^2 - 1)}{3[(x^2 - 1)^2]^{2/3}}.$$

Idea clave

Justo en $x = 1$ (y en $x = -1$), la base $(x^2 - 1)^2$ se anula, así que el denominador de $f'(x)$ tiende a 0: esto es la señal de que hay que estudiar el límite del cociente incremental por separado, en vez de simplemente evaluar $f'(1)$.

Estudiamos los límites laterales de la derivada cuando $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty.$$

Como ambos límites laterales son infinitos (y de signo distinto), la gráfica presenta una **cúspide** en $x = 1$: f no es derivable en $x = 1$.

Apartado c)

Para $x \neq \pm 1$, el signo de $f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1)}{3[(x^2 - 1)^2]^{2/3}}$ coincide con el signo de $x(x^2 - 1)$, ya que el denominador siempre es positivo. Estudiamos el signo de $x(x^2 - 1)$ en cada intervalo:

- En $(-\infty, -1)$: $x < 0$, $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (decreciente).
- En $(-1, 0)$: $x < 0$, $x^2 - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (creciente).
- En $(0, 1)$: $x > 0$, $x^2 - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (decreciente).
- En $(1, +\infty)$: $x > 0$, $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (creciente).

Por tanto:

- En $x = -1$: f pasa de decreciente a creciente $\Rightarrow$ **mínimo relativo**, $f(-1) = 0$.
- En $x = 0$: f pasa de creciente a decreciente $\Rightarrow$ **máximo relativo**, $f(0) = 1$.
- En $x = 1$: f pasa de decreciente a creciente $\Rightarrow$ **mínimo relativo**, $f(1) = 0$.

Idea clave

Como $f(x) \geq 0$ para todo x (es una raíz cúbica de un cuadrado) y se anula exactamente en $x = \pm 1$, esos dos mínimos relativos son automáticamente también **mínimos absolutos**. En cambio, como $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, el máximo relativo en $(0, 1)$ no puede ser máximo absoluto: no hay techo.

Los **mínimos relativos** en $x = \pm 1$ (valor 0) son también los **mínimos absolutos**. El **máximo relativo** en $x = 0$ (valor 1) **no es un máximo absoluto**, ya que $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

PREGUNTA A.3: Geometría del espacio (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Sean los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$. Se pide:

- (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.
- (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.
- (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T .

SOLUCIÓN

Apartado a)

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 3, -3).$$

Idea clave

Tres puntos forman un triángulo (no están alineados) exactamente cuando $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no son proporcionales, es decir, cuando su producto vectorial no es nulo.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4(-3) - (-4)(3), (-4)(1) - (-1)(-3), (-1)(3) - 4(1)) = (0, -7, -7).$$

Como $(0, -7, -7) \neq \vec{0}$, los vectores no son proporcionales: A, B, C **forman un triángulo**.

Este mismo vector es la normal del plano que contiene a los tres puntos. Usando $A(1, -2, 3)$:

$$0(x - 1) - 7(y + 2) - 7(z - 3) = 0 \implies -7y - 7z + 7 = 0 \implies y + z = 1.$$

El plano buscado es $y + z = 1$.

Apartado b)

La recta AB tiene dirección $\overrightarrow{AB} = (-1, 4, -4)$ y pasa por $A(1, -2, 3)$:

$$(x, y, z) = (1 - t, -2 + 4t, 3 - 4t).$$

Imponemos $z = 1$:

$$3 - 4t = 1 \implies t = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo: $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $y = -2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

El punto de corte es $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Apartado c)

Calculamos las longitudes de los tres lados:

$$|AB| = \|(-1, 4, -4)\| = \sqrt{1 + 16 + 16} = \sqrt{33}, \quad |AC| = \|(1, 3, -3)\| = \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19},$$

$$|BC| = \|C - B\| = \|(2, -1, 1)\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

El perímetro es $\sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} \approx 12.55$.

PREGUNTA A.4: Probabilidad (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

a (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A . Calcule $P(A \cup B)$.

b (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C | A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(A | D) = 0.2$ y $P(D | A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Como A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.3(0.5) = 0.15$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.5 - 0.15 = 0.65.$$

$$P(A \cup B) = 0.65.$$

Apartado b)

$$P(A \cap C) = P(C | A)P(A) = 0.5(0.3) = 0.15.$$

Idea clave

$P(A \cap \bar{C})$ es la parte de A que no está en C : se obtiene restando de $P(A)$ la parte que sí está en C .

$$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) = 0.3 - 0.15 = 0.15.$$

$P(A \cap \bar{C}) = 0.15$ (en este caso particular coincide con $P(A \cap C)$, porque $P(C | A) = 0.5$ reparte A exactamente por la mitad entre C y $\bar{C}$).

Apartado c)

De $P(D | A) = 0.5$: $P(A \cap D) = P(D | A)P(A) = 0.5(0.3) = 0.15$.

De $P(A | D) = 0.2$: $P(A \cap D) = P(A | D)P(D) \Rightarrow 0.15 = 0.2 P(D)$.

$$P(D) = \frac{0.15}{0.2} = 0.75.$$

$P(D) = 0.75$.

PREGUNTA B.1: Sistemas de ecuaciones con parámetro (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Dado el sistema

$$\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3, \end{cases}$$

se pide:

a (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a .

b (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.

c (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante desarrollando por la primera columna:

$$\begin{aligned} |A| &= (a+1) \begin{vmatrix} a-1 & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} - 0 + 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1-2a) + 4(4) = (a+1)(-a-1) + 16. \\ &= -(a+1)^2 + 16. \end{aligned}$$

Igualamos a cero:

$$-(a+1)^2 + 16 = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 16 \Rightarrow a+1 = \pm 4 \Rightarrow a = 3 \text{ o } a = -5.$$

Idea clave

Como siempre, solo hace falta estudiar en detalle los valores de a que anulan $|A|$: para el resto, el sistema es automáticamente compatible determinado.

Si $a \neq 3$ y $a \neq -5$: $|A| \neq 0$, luego el sistema es **compatible determinado**.

Si $a = 3$: puede comprobarse que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 2 < 3$: el sistema es **compatible indeterminado**.

Si $a = -5$: puede comprobarse igualmente que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 2 < 3$: el sistema también es **compatible indeterminado**.

Apartado b)

Para $a = 3$, el sistema es

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \\ 4x + 6y + z = 3. \end{cases}$$

De la primera, $y = -x$. Sustituyendo en la segunda: $z = 3 - 2y = 3 + 2x$. Comprobamos en la tercera: $4x + 6(-x) + (3 + 2x) = 4x - 6x + 3 + 2x = 3$, identidad siempre cierta (confirma que es SCI).

Llamando $x = t$:

$$(x, y, z) = (t, -t, 3 + 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La solución para $a = 3$ es $(x, y, z) = (t, -t, 3 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Apartado c)

Para $a = 5$ (que no anula $|A|$, así que el sistema es compatible determinado):

$$\begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ 4y + z = 3 \\ 4x + 10y + z = 3. \end{cases}$$

De la primera, $x = -\frac{2y}{3}$. Restando la tercera menos la segunda: $4x + 6y = 0 \Rightarrow x = -\frac{3y}{2}$.

Idea clave

Tenemos dos expresiones distintas para x en función de y (una de la primera ecuación, otra de la resta de la segunda y la tercera): igualarlas es la forma más rápida de encontrar y .

Iguando ambas expresiones de x : $-\frac{2y}{3} = -\frac{3y}{2} \Rightarrow \frac{2y}{3} = \frac{3y}{2} \Rightarrow 4y = 9y \Rightarrow 5y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Con $y = 0$: $x = 0$ (de cualquiera de las dos expresiones). De la segunda ecuación original: $4(0) + z = 3 \Rightarrow z = 3$.

Comprobación: $6(0) + 4(0) = 0$ ✓; $4(0) + 3 = 3$ ✓; $4(0) + 10(0) + 3 = 3$ ✓.

La solución para $a = 5$ es $(x, y, z) = (0, 0, 3)$.

PREGUNTA B.2: Análisis: continuidad, límites e integrales (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1, \end{cases}$$

se pide:

a (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x^2 - 1}$.

c (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Cada trozo es continuo en su propio dominio (cociente de polinomios con denominador no nulo, salvo excepciones puntuales). Hay dos puntos que requieren estudio: $x = -1$ (donde cambia la definición) y $x = 1$ (donde se anula el denominador del segundo trozo, $3 - 3x$).

En $x = -1$:

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{2 + (-1)^2} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{2(-1)^2}{3 - 3(-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Como los valores laterales coinciden con $f(-1)$: **f es continua en $x = -1$.**

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{3 - 3x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

(el denominador $3 - 3x$ cambia de signo al cruzar $x = 1$).

Idea clave

$x = 1$ no es un punto “especial” señalado por el cambio de definición de f : es, simplemente, donde el segundo trozo tiene una asíntota vertical. Hay que revisarlo igualmente, porque cae dentro del dominio de ese trozo ($x > -1$).

f no es continua en $x = 1$ (discontinuidad de salto infinito / asíntota vertical).

En cualquier otro punto de $\mathbb{R}$, f es continua.

Apartado b)

Como $x \rightarrow -\infty$ implica $x \leq -1$, usamos el primer trozo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{2+x^2}}{2x^2 - 1}.$$

Idea clave

Antes de complicarse con el cociente completo, conviene notar que $\frac{x^2}{2+x^2} \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$ (el numerador y el denominador tienen el mismo grado). El límite se reduce entonces a $\frac{1}{2x^2-1}$, que tiende a 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2+x^2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2-1} = 0.$$

El límite pedido es 0.

Apartado c)

El intervalo $[-1, 0]$ está (salvo el propio extremo $x = -1$, que no afecta al valor de la integral) contenido en la región $x > -1$, así que usamos el segundo trozo:

$$\int_{-1}^0 \frac{2x^2}{3-3x} dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1-x} dx.$$

Dividimos x^2 entre $(1-x)$: $x^2 = (1-x)(-x-1) + 1$, es decir, $\frac{x^2}{1-x} = -x-1 + \frac{1}{1-x}$.

$$\frac{2}{3} \int_{-1}^0 \left(-x-1 + \frac{1}{1-x} \right) dx = \frac{2}{3} \left[-\frac{x^2}{2} - x - \ln|1-x| \right]_{-1}^0.$$

En $x = 0$: $0 - 0 - \ln 1 = 0$. En $x = -1$: $-\frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{1}{2} - \ln 2$.

$$\frac{2}{3} \left[0 - \left(\frac{1}{2} - \ln 2 \right) \right] = \frac{2}{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) = \frac{2 \ln 2}{3} - \frac{1}{3}.$$

El valor de la integral es $\frac{2 \ln 2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2 \ln 2 - 1}{3}$.

PREGUNTA B.3: Geometría del espacio: recta, plano y simetrías (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1, 1, 1)$, se pide:

- a (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
- b (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π .
- c (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r .

SOLUCIÓN

La recta r tiene dirección $\vec{d}_r = (2, 1, -2)$ y pasa por $P_r(1, 0, -1)$. El plano π tiene normal $\vec{n}_\pi = (1, 0, -1)$.

Apartado a)

Idea clave

Si $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$, la recta es paralela al plano (o está contenida en él); si no, se cortan en un único punto.

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 2(1) + 1(0) + (-2)(-1) = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Como el producto escalar no es cero, r y π **se cortan** en un único punto.

Parametrizamos r : $(1 + 2t, t, -1 - 2t)$, y sustituimos en π :

$$(1 + 2t) - (-1 - 2t) = 2 \implies 1 + 2t + 1 + 2t = 2 \implies 4t = 0 \implies t = 0.$$

El punto de intersección es $(1, 0, -1)$ (que resulta ser precisamente P_r).

Apartado b)

La recta perpendicular a π que pasa por $A(1, 1, 1)$ tiene dirección $\vec{n}_\pi = (1, 0, -1)$:

$$(x, y, z) = (1 + \mu, 1, 1 - \mu).$$

Sustituimos en π :

$$(1 + \mu) - (1 - \mu) = 2 \implies 2\mu = 2 \implies \mu = 1.$$

La proyección ortogonal de A sobre π es $(2, 1, 0)$.

Apartado c)**Idea clave**

Para hallar el simétrico de A respecto de una recta (no de un plano), primero hallamos el pie de la perpendicular desde A a la recta, M ; el simétrico es $2M - A$.

Buscamos el punto de r , $P(1 + 2s, s, -1 - 2s)$, tal que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{d}_r$:

$$\overrightarrow{AP} = (2s, s - 1, -2 - 2s).$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}_r = 2(2s) + 1(s - 1) + (-2)(-2 - 2s) = 4s + s - 1 + 4 + 4s = 9s + 3 = 0 \implies s = -\frac{1}{3}.$$

El pie de la perpendicular es

$$M = \left(1 - \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

El punto simétrico es

$$A' = 2M - A = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

El punto simétrico de A respecto a r es $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

PREGUNTA B.4: Probabilidad: distribución normal (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b (0.5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18 % de las sardinas capturadas.

c (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

SOLUCIÓN

Sea X la longitud (en mm) de una sardina, $X \sim N(175, 25.75)$.

Apartado a)

Buscamos $P(X > 160)$ (ya que 16 cm = 160 mm). Tipificamos:

$$Z = \frac{160 - 175}{25.75} \approx -0.58.$$

$$P(X > 160) = P(Z > -0.58) = P(Z < 0.58) = 0.7190.$$

Idea clave

$P(Z > -0.58) = P(Z < 0.58)$ por la simetría de la campana de Gauss respecto de 0.

Aproximadamente el 71.90 % de las sardinas serán de la calidad esperada.

Apartado b)

Como 175 es la media, $P(X < 175) = 0.5$. Buscamos $t < 175$ tal que $P(t < X < 175) = 0.18$, es decir,

$$P(X < t) = P(X < 175) - 0.18 = 0.5 - 0.18 = 0.32.$$

Idea clave

Como $t < 175$, el valor tipificado z_t es negativo. Usamos $P(Z < z_t) = 1 - P(Z < |z_t|)$ para poder buscar en la tabla (que solo da valores positivos de z), y buscamos el $|z_t|$ tal que $P(Z < |z_t|) = 1 - 0.32 = 0.68$.

Buscando en la tabla el valor más próximo a 0.68: $P(Z < 0.47) = 0.6808 \approx 0.68$. Por tanto $z_t \approx -0.47$:

$$t = 175 + (-0.47)(25.75) \approx 175 - 12.10 = 162.90 \text{ mm.}$$

La longitud buscada es, aproximadamente, $t \approx 162.90$ mm.

Apartado c)

Primero calculamos la probabilidad de que una sardina sea menor de 15 cm = 150 mm:

$$Z = \frac{150 - 175}{25.75} \approx -0.97 \implies P(X < 150) = 1 - P(Z < 0.97) = 1 - 0.8340 = 0.1660.$$

Sea Y el número de sardinas devueltas (menores de 150 mm) en un lote de 10. Como las sardinas son independientes, $Y \sim B(10, 0.166)$.

Idea clave

“Al menos una” es el complementario de “ninguna”: es mucho más fácil calcular $1 - P(Y = 0)$ que sumar $P(Y = 1) + \dots + P(Y = 10)$.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0.166)^{10} = 1 - (0.834)^{10} \approx 1 - 0.1628 = 0.8372.$$

La probabilidad de que haya al menos una sardina devuelta en el lote es, aproximadamente, 0.8372.