

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Ordinaria 2024

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las **ocho** que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

Idea clave

Este examen tiene un formato distinto a los anteriores de Madrid: no hay bloques ni preguntas obligatorias, sino ocho preguntas independientes (A.1–A.4 y B.1–B.4) de las que el alumno elige y responde a cualquier combinación de cuatro. Aquí resolvemos las ocho, ya que cualquiera de ellas puede ser la elegida.

PREGUNTA A.1: Sistemas de ecuaciones (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

SOLUCIÓN

Llamamos L , I , C a las longitudes (en cm) del listón largo, intermedio y corto, respectivamente.

Idea clave

Como en todo problema de enunciado, conviene traducir cada frase a una ecuación por separado antes de resolver nada.

Primera condición. “Dos largos y cuatro intermedios” dan la misma longitud que “tres intermedios y quince cortos”:

$$2L + 4I = 3I + 15C \implies 2L + I - 15C = 0.$$

Segunda condición. Un listón largo supera en 17 a la suma de uno intermedio y uno corto:

$$L = I + C + 17 \implies L - I - C = 17.$$

Tercera condición. Nueve cortos más 7 igualan a un intermedio seguido de un largo:

$$9C + 7 = I + L \implies I + L - 9C = 7.$$

El sistema a resolver es

$$\begin{cases} 2L + I - 15C = 0 \\ L - I - C = 17 \\ I + L - 9C = 7. \end{cases}$$

Sumando la 2.ª y la 3.ª ecuación se elimina I :

$$2L - 10C = 24 \implies L - 5C = 12 \implies L = 12 + 5C. \quad (1)$$

Sustituyendo en la 1.ª ecuación:

$$2(12 + 5C) + I - 15C = 0 \implies 24 + 10C + I - 15C = 0 \implies I = 5C - 24. \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la 2.ª ecuación original:

$$(12 + 5C) - (5C - 24) - C = 17 \implies 12 + 5C - 5C + 24 - C = 17 \implies 36 - C = 17 \implies C = 19.$$

Con $C = 19$: de (1), $L = 12 + 5(19) = 12 + 95 = 107$. De (2), $I = 5(19) - 24 = 95 - 24 = 71$.

Comprobación: $2(107) + 71 - 15(19) = 214 + 71 - 285 = 0$ ✓; $107 - 71 - 19 = 17$ ✓; $71 + 107 - 9(19) = 178 - 171 = 7$ ✓.

El listón largo mide 107 cm, el intermedio 71 cm y el corto 19 cm.

PREGUNTA A.2: Análisis: recta tangente, Rolle, Bolzano e integrales (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

$$f(\pi) = \pi^4 + \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 + \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 = 5\pi^4.$$

Derivamos: $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$.

$$f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi^3 + 2\pi^3 + \pi^3 = 10\pi^3.$$

La recta tangente en $x = \pi$ es

$$y - 5\pi^4 = 10\pi^3(x - \pi) \implies y = 10\pi^3 x - 10\pi^4 + 5\pi^4 = 10\pi^3 x - 5\pi^4.$$

La recta tangente es $y = 10\pi^3x - 5\pi^4$.

Apartado b)

Vía el **teorema de Rolle**. f es un polinomio, luego continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[-\pi, 0]$. Evaluamos en los extremos:

$$f(-\pi) = \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 = \pi^4, \quad f(0) = \pi^4.$$

Idea clave

El teorema de Rolle exige $f(a) = f(b)$, no que f sea constante entre medias: aquí basta con haber comprobado que los valores en los extremos coinciden.

Como $f(-\pi) = f(0) = \pi^4$ y f es continua en $[-\pi, 0]$ y derivable en $(-\pi, 0)$, por el **teorema de Rolle** existe al menos un punto $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

Vía el **teorema de Bolzano**. Aplicamos Bolzano no a f , sino a su derivada f' , que también es continua (es un polinomio) en $[-\pi, 0]$:

$$f'(-\pi) = 4(-\pi)^3 + 3\pi(-\pi)^2 + 2\pi^2(-\pi) + \pi^3 = -4\pi^3 + 3\pi^3 - 2\pi^3 + \pi^3 = -2\pi^3.$$

$$f'(0) = \pi^3.$$

Idea clave

Bolzano se aplica a una función continua que cambia de signo en los extremos del intervalo; aquí la función a la que se lo aplicamos es f' , no f , para concluir que f' se anula en algún punto intermedio.

Como $f'(-\pi) = -2\pi^3 < 0$ y $f'(0) = \pi^3 > 0$, y f' es continua en $[-\pi, 0]$, por el **teorema de Bolzano** existe al menos un punto $c \in (-\pi, 0)$ tal que $f'(c) = 0$.

Apartado c)

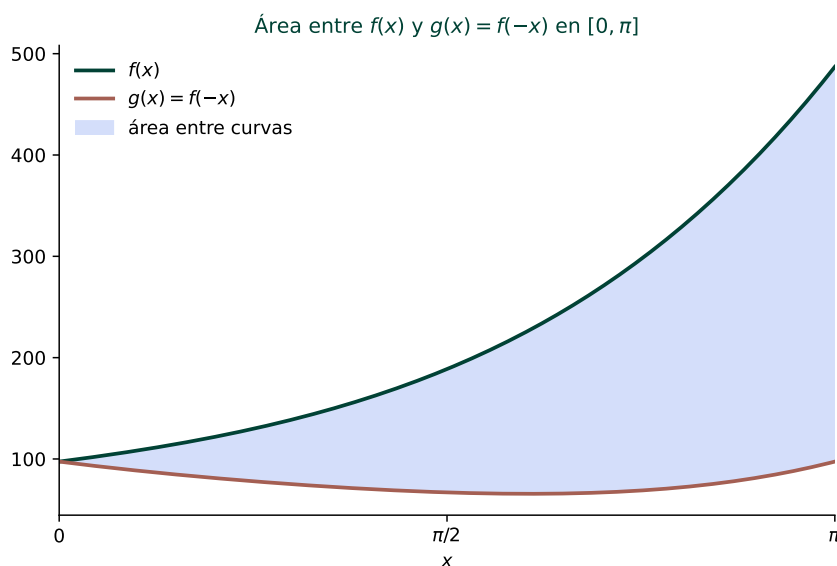


Figura 1: Área entre $f(x)$ y $g(x) = f(-x)$ en $[0, \pi]$.

Calculamos $g(x) = f(-x)$:

$$g(x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4.$$

La diferencia es

$$f(x) - g(x) = 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 2\pi x(x^2 + \pi^2).$$

Idea clave

Antes de integrar, conviene comprobar el signo de $f - g$ en el intervalo: si no cambia de signo, el área es directamente el valor absoluto de la integral, sin necesidad de partir el intervalo.

Para $x \in [0, \pi]$, tenemos $x \geq 0$ y $x^2 + \pi^2 > 0$, luego $f(x) - g(x) \geq 0$ en todo el intervalo (se anula solo en $x = 0$). El área es, por tanto, directamente la integral:

$$\text{Área} = \int_0^\pi [2\pi x^3 + 2\pi^3 x] dx = \left[\frac{\pi x^4}{2} + \pi^3 x^2 \right]_0^\pi = \frac{\pi \cdot \pi^4}{2} + \pi^3 \cdot \pi^2 = \frac{\pi^5}{2} + \pi^5 = \frac{3\pi^5}{2}.$$

El área entre las gráficas es $\frac{3\pi^5}{2}$.

PREGUNTA A.3: Geometría del espacio (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Dados los puntos $A(0, 0, 1)$ y $B(1, 1, 0)$, se pide: **a (1 punto)** Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2 , que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Igual que en ejercicios anteriores: para que un plano contenga a $\overrightarrow{AB}$ y sea perpendicular al plano $z = 0$ (de normal $(0, 0, 1)$), su normal se obtiene como el producto vectorial de ambos vectores.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1), \quad \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times (0, 0, 1) = (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0, (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = (1, -1, 0).$$

El plano pasa por $A(0, 0, 1)$ con normal $(1, -1, 0)$:

$$1(x - 0) - 1(y - 0) + 0(z - 1) = 0 \implies x - y = 0.$$

El plano buscado es $x - y = 0$.

Apartado b)

Tanto $A(0, 0, 1)$ como $B(1, 1, 0)$ verifican $x + z = 1$, así que ambos están en el plano dado. Buscamos una dirección $\vec{d} = (t, s, -t)$ (perpendicular a la normal del plano, $(1, 0, 1)$), para que las rectas queden

contenidas en él).

Idea clave

La distancia entre dos rectas paralelas con dirección $\vec{d}$ que pasan por A y B es $\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$. Fijamos $t = 1$ (la dirección solo importa salvo escala) y dejamos s como incógnita.

Con $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ y $\vec{d} = (1, s, -1)$:

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{d} = (1 \cdot (-1) - (-1) \cdot s, (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot s - 1 \cdot 1) = (s - 1, 0, s - 1).$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \vec{d}\|^2 = 2(s - 1)^2, \quad \|\vec{d}\|^2 = 1 + s^2 + 1 = s^2 + 2.$$

Imponemos distancia = 1:

$$\frac{2(s - 1)^2}{s^2 + 2} = 1 \implies 2(s - 1)^2 = s^2 + 2 \implies 2s^2 - 4s + 2 = s^2 + 2 \implies s^2 - 4s = 0 \implies s(s - 4) = 0.$$

Tomamos la solución más simple, $s = 0$, es decir, $\vec{d} = (1, 0, -1)$.

Las rectas buscadas son:

$$r_1 \equiv (x, y, z) = (0, 0, 1) + \mu(1, 0, -1), \quad r_2 \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + \mu(1, 0, -1), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

PREGUNTA A.4: Probabilidad (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A | B) - P(B | A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a (1.5 puntos) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

De $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$ obtenemos $P(A) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$.

Idea clave

$P(A \cap \overline{B})$ es la parte de A que *no* está en B : por eso $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, lo que nos da directamente $P(A \cap B)$.

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \implies P(A \cap B) = \frac{9}{20} - \frac{3}{10} = \frac{9}{20} - \frac{6}{20} = \frac{3}{20}.$$

Para hallar $P(B)$, usamos la segunda condición:

$$P(A | B) - P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{24}.$$

Sustituyendo $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$ y $P(A) = \frac{9}{20}$:

$$\frac{3/20}{P(B)} - \frac{3/20}{9/20} = \frac{1}{24} \implies \frac{3/20}{P(B)} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$$

$$\frac{3/20}{P(B)} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \implies P(B) = \frac{3/20}{3/8} = \frac{3}{20} \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{20} \text{ y } P(B) = \frac{2}{5}.$$

Apartado b)

Como C es independiente de A :

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A)P(C).$$

$$\frac{9}{20} + P(C) - \frac{9}{20}P(C) = \frac{14}{25} \implies P(C) \left(1 - \frac{9}{20}\right) = \frac{14}{25} - \frac{9}{20}.$$

Calculamos ambos lados con denominador común (100):

$$\frac{14}{25} - \frac{9}{20} = \frac{56}{100} - \frac{45}{100} = \frac{11}{100}, \quad 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}.$$

$$P(C) \cdot \frac{11}{20} = \frac{11}{100} \implies P(C) = \frac{11/100}{11/20} = \frac{11}{100} \cdot \frac{20}{11} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}.$$

$$P(C) = \frac{1}{5}.$$

PREGUNTA B.1: Matrices y determinantes (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Consideremos las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

Se pide:

a (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b (0.75 puntos) Calcular el determinante de la matriz AA^t .

c (0.5 puntos) Resolver el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Fíjate en que B es simplemente b veces una matriz fija: $B = bM$, con $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Esto va a ser la clave del resultado.

Como $\det(B) = b^3 \det(M)$, y puede comprobarse que $\det(M) = -1 \neq 0$, se tiene $\det(B) = -b^3$, que es distinto de cero para todo $b \neq 0$: por tanto B siempre es invertible en las condiciones del enunciado, y B^{-1} existe.

Como $B = bM$, su inversa es $B^{-1} = \frac{1}{b}M^{-1}$ (el escalar b pasa a estar dividiendo). Entonces:

$$BCB^{-1} = (bM)C \left(\frac{1}{b}M^{-1} \right) = MCM^{-1}.$$

Idea clave

El escalar b se cancela exactamente entre B y B^{-1} : por eso BCB^{-1} no depende de b en absoluto, sea cual sea su valor (siempre que $b \neq 0$, para que B sea invertible).

Multiplicando explícitamente MCM^{-1} (con M fija) se comprueba que el resultado es exactamente A , independientemente de b .

Por tanto, la igualdad $BCB^{-1} = A$ se cumple para todo $b \neq 0$, ya que el valor de b se cancela en la expresión BCB^{-1} .

Apartado b)

Idea clave

$\det(AA^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2$, ya que $\det(A^t) = \det(A)$. No hace falta multiplicar las matrices.

Calculamos $\det(A)$ desarrollando por la primera fila:

$$\det(A) = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(3+1) + 1(3-1) + 1(-1-1) = 12+2-2 = 12.$$

$$\det(AA^t) = \det(A)^2 = 12^2 = 144.$$

$$\det(AA^t) = 144.$$

Apartado c)

Para $b = 1$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resolvemos $B\vec{v} = (3, -1, 1)^T$ por reducción.

De la ecuación 3: $x + y + z = 1$. De la ecuación 1: $x + 2y + z = 3$. Restando (ec.1 - ec.3): $y = 2$.

De la ecuación 2: $2x + 3y + z = -1$. Sustituyendo $y = 2$: $2x + z = -7$.

De la ecuación 3 con $y = 2$: $x + z = 1 - 2 = -1 \Rightarrow z = -1 - x$.

Sustituyendo en $2x + z = -7$: $2x + (-1 - x) = -7 \Rightarrow x - 1 = -7 \Rightarrow x = -6$. Entonces $z = -1 - (-6) = 5$.

Comprobación: $(-6) + 2(2) + 5 = -6 + 4 + 5 = 3 \checkmark$; $2(-6) + 3(2) + 5 = -12 + 6 + 5 = -1 \checkmark$; $(-6) + 2 + 5 = 1 \checkmark$.

La solución es $(x, y, z) = (-6, 2, 5)$.

PREGUNTA B.2: Integrales y límites (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Calcule:

a (1.25 puntos) $\int_1^e (x+2) \ln x \, dx$.

b (1.25 puntos) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\left(\frac{1}{\cos x} \right)}$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Integramos por partes con $u = \ln x$, $dv = (x+2) \, dx$, de donde $du = \frac{1}{x} \, dx$, $v = \frac{x^2}{2} + 2x$:

$$\begin{aligned} \int (x+2) \ln x \, dx &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \int \left(\frac{x}{2} + 2 \right) \, dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C. \end{aligned}$$

Aplicamos la regla de Barrow entre 1 y e :

$$\left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} - 2x \right]_1^e.$$

En $x = e$ (con $\ln e = 1$):

$$\left(\frac{e^2}{2} + 2e \right) - \frac{e^2}{4} - 2e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} = \frac{e^2}{4}.$$

En $x = 1$ (con $\ln 1 = 0$):

$$0 - \frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4}.$$

$$\int_1^e (x+2) \ln x \, dx = \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{9}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{9}{4} = \frac{e^2 + 9}{4}.$$

El valor de la integral es $\frac{e^2 + 9}{4}$.

Apartado b)

Idea clave

Es una indeterminación del tipo 1^∞ : la base $\operatorname{tg}(x/2) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \pi/2$, y el exponente $1/\cos x \rightarrow \infty$. El truco estándar es escribir la expresión como una exponencial y calcular el límite del exponente.

Escribimos

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{1/\cos x} = \exp\left(\frac{\ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\cos x}\right),$$

y calculamos el límite del exponente, que es una indeterminación $\frac{0}{0}$ (aplicamos L'Hôpital):

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{2} \sec^2(x/2)}{-\operatorname{sen} x}.$$

Evaluando en $x = \pi/2$: $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, $\sec^2(\pi/4) = 2$, $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$:

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2/1}{-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Por tanto, el límite pedido es

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{1/\cos x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

El límite vale $\frac{1}{e}$.

PREGUNTA B.3: Geometría del espacio: tetraedro y paralelepípedo (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 0)$ y $P_3(1, 3, 2)$, pero del cuarto punto $P_4(3, a, 3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a .

b (1 punto) Dado el punto $Q(3, 3, 3)$, se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2 , P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

SOLUCIÓN

Apartado a)

Formamos los vectores desde P_1 :

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_4} = (2, a-1, 2).$$

El volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4})|.$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & a-1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (4 - (a-1)) + 2(0+2) = 5 - a + 4 = 9 - a.$$

Idea clave

El volumen nos da una ecuación en valor absoluto, así que aparecen dos posibles valores de a : hay que estudiar ambos por separado antes de decidir cuál es físicamente válido.

Imponemos $V = 1$:

$$\frac{|9-a|}{6} = 1 \implies |9-a| = 6 \implies a = 3 \text{ o } a = 15.$$

Comprobamos la restricción de que ninguna arista supere 10. Calculamos, para cada valor de a , la arista más larga (la que involucra a P_4 , ya que las otras no dependen de a):

Si $a = 15$: $P_4 = (3, 15, 3)$, y

$$\overline{P_1P_4} = \sqrt{2^2 + 14^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 196 + 4} = \sqrt{204} = 2\sqrt{51} \approx 14.28 > 10.$$

Esta arista supera la altura de la impresora: $a = 15$ **no es válido**.

Si $a = 3$: $P_4 = (3, 3, 3)$, y

$$\overline{P_1P_4} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46, \quad \overline{P_2P_4} = \sqrt{14} \approx 3.74, \quad \overline{P_3P_4} = \sqrt{5} \approx 2.24.$$

Junto con las aristas fijas $\overline{P_1P_2} = \sqrt{2}$, $\overline{P_1P_3} = \sqrt{5}$, $\overline{P_2P_3} = 3$, todas están muy por debajo de 10.

El único valor válido es $a = 3$.

Apartado b)

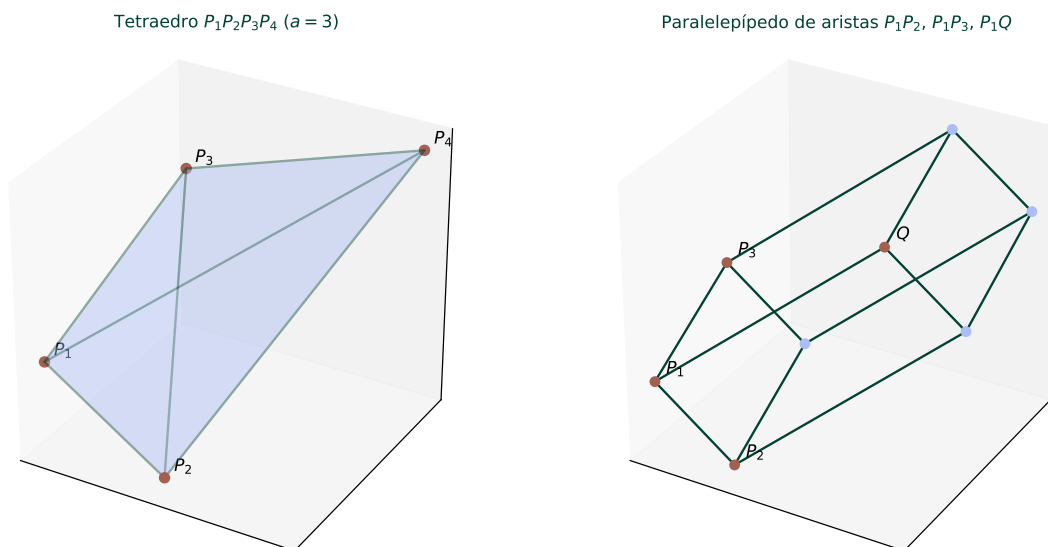


Figura 2: Tetraedro del apartado a) (con $a = 3$) y paralelepípedo del apartado b).

Los vectores arista del paralelepípedo, desde $P_1(1, 1, 1)$, son:

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -1), \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 1), \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{P_1Q} = Q - P_1 = (2, 2, 2).$$

Idea clave

Los ocho vértices de un paralelepípedo de aristas $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ desde un vértice P_1 se obtienen sumando a P_1 cada una de las $2^3 = 8$ combinaciones posibles de tomar o no cada vector.

Los ocho vértices son $P_1 + i\vec{v}_1 + j\vec{v}_2 + k\vec{v}_3$, con $i, j, k \in \{0, 1\}$:

$$\begin{array}{ll} (0, 0, 0) : P_1 = (1, 1, 1) & (1, 0, 0) : P_2 = (2, 1, 0) \\ (0, 1, 0) : P_3 = (1, 3, 2) & (0, 0, 1) : Q = (3, 3, 3) \\ (1, 1, 0) : (2, 3, 1) & (1, 0, 1) : (4, 3, 2) \\ (0, 1, 1) : (3, 5, 4) & (1, 1, 1) : (4, 5, 3) \end{array}$$

Los ocho vértices del paralelepípedo son:

$$(1, 1, 1), (2, 1, 0), (1, 3, 2), (3, 3, 3), (2, 3, 1), (4, 3, 2), (3, 5, 4), (4, 5, 3).$$

PREGUNTA B.4: Probabilidad (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener

una puntuación impar.

b (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

SOLUCIÓN

Denotamos por z el resultado del dado azul y r el del dado rojo, cada uno uniforme en $\{1, \dots, 6\}$, independientes, con 36 resultados (z, r) equiprobables. La puntuación es

$$\text{Punt}(z, r) = \begin{cases} z + 2r & \text{si } z \text{ es par} \\ z + r & \text{si } z \text{ es impar.} \end{cases}$$

Apartado a)

Idea clave

Al ser una suma que depende de la paridad de z , conviene enumerar directamente los pares (z, r) que dan la puntuación buscada, separando el caso z par del caso z impar.

Puntuación 10: Si z es par, $z + 2r = 10$: para $z = 2, 4, 6$ obtenemos $r = 4, 3, 2$ respectivamente (todos válidos, entre 1 y 6). Si z es impar, $z + r = 10$: como $z, r \leq 6$, necesitaríamos $z \geq 4$, pero z impar y ≤ 6 solo puede ser $z = 5 \Rightarrow r = 5$, válido.

Los casos son: $(2, 4), (4, 3), (6, 2), (5, 5)$ — un total de 4 casos.

$$P(\text{Punt} = 10) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Puntuación impar: Si z es par, $z + 2r$ es par + par = par, nunca impar. Si z es impar, $z + r$ es impar solo cuando r es par. Por tanto, la puntuación es impar exactamente cuando z es impar ($z \in \{1, 3, 5\}$, 3 valores) y r es par ($r \in \{2, 4, 6\}$, 3 valores):

$$P(\text{Punt impar}) = \frac{3 \times 3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

$$P(\text{Punt} = 10) = \frac{1}{9} \text{ y } P(\text{Punt impar}) = \frac{1}{4}.$$

Apartado b)

Puntuación 8: Si z par, $z + 2r = 8$: $z = 2 \Rightarrow r = 3$; $z = 4 \Rightarrow r = 2$; $z = 6 \Rightarrow r = 1$. Si z impar, $z + r = 8$: $z = 3 \Rightarrow r = 5$; $z = 5 \Rightarrow r = 3$ ($z = 1 \Rightarrow r = 7$, inválido; $z = 7$ no existe).

Los casos con puntuación 8 son: $(2, 3), (4, 2), (6, 1), (3, 5), (5, 3)$ — un total de 5 casos, de los cuales 3 tienen z par: $(2, 3), (4, 2), (6, 1)$.

$$P(z \text{ par} \mid \text{Punt} = 8) = \frac{3}{5}.$$

Puntuación par. Contamos todos los casos con puntuación par: son los 27 casos restantes de los 36 totales (ya vimos que hay 9 con puntuación impar).

Idea clave

En vez de volver a enumerar todo desde cero, aprovechamos que ya sabemos cuántos casos dan puntuación impar (9, calculados en a): los demás, por complementario, dan puntuación par.

De esos 27 casos con puntuación par, contamos cuántos tienen r impar. Cuando z es par (18 casos en total: $z \in \{2, 4, 6\}$, $r \in \{1, \dots, 6\}$), la puntuación siempre es par, y de esos, r impar ocurre en la mitad: $3 \times 3 = 9$ casos. Cuando z es impar y la puntuación es par, necesariamente r también es impar (ya que impar+impar=par): esto da $3 \times 3 = 9$ casos más (los mismos que en el cálculo de a) para impares, pero aquí es z impar y r impar).

En total: $9 + 9 = 18$ casos con puntuación par y r impar, de los 27 con puntuación par:

$$P(r \text{ impar} \mid \text{Punt par}) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

$$P(z \text{ par} \mid \text{Punt} = 8) = \frac{3}{5} \text{ y } P(r \text{ impar} \mid \text{Punt par}) = \frac{2}{3}.$$