

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Extraordinaria 2023

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las **ocho** que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

Idea clave

Mismo formato que los exámenes anteriores de esta serie: resolvemos las ocho preguntas (A.1–A.4 y B.1–B.4).

PREGUNTA A.1: Matrices (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

- a (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.
- b (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b .
- c (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.
- d (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5 .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

A es 2×3 , así que A^t es 3×2 y $A^t A$ es 3×3 (cuadrada), aunque A no lo sea.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Puede comprobarse (por ejemplo, viendo que la fila 1 es combinación de las filas 2 y 3, $F_1 = 2F_2 - F_3$) que $\det(A^t A) = 0$.

$\det(A^t A) = 0$.

Apartado b)

$$BA = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}.$$

Idea clave

El menor formado por las dos últimas columnas, $\begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & 2b \end{vmatrix} = 2b^2$, se anula solo si $b = 0$: eso marca la frontera entre los dos casos.

Si $b \neq 0$: el menor $2b^2 \neq 0$, así que $\text{rg}(BA) = 2$.

Si $b = 0$: la primera fila de BA se anula por completo $((0, 0, 0))$ y la segunda no, así que $\text{rg}(BA) = 1$.

Apartado c)

Para $b = 2$: $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, con $\det B = 4 \neq 0$.

$$B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: $B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{I}.$

Apartado d)

Para $b = 1$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Idea clave

En vez de multiplicar B cinco veces seguidas, es más rápido calcular B^2 y observar el patrón, ya que $B^5 = (B^2)^2 \cdot B$.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos el patrón: $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ (puede comprobarse por inducción, ya que cada multiplicación por B suma un 1 más a la entrada inferior izquierda). Por tanto:

$$B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

PREGUNTA A.2: Análisis: optimización de un consumo a trozos (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por

hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \frac{5v}{3} & \text{si } 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \frac{v^2}{3} & \text{si } v \geq 3. \end{cases}$$

a (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

SOLUCIÓN

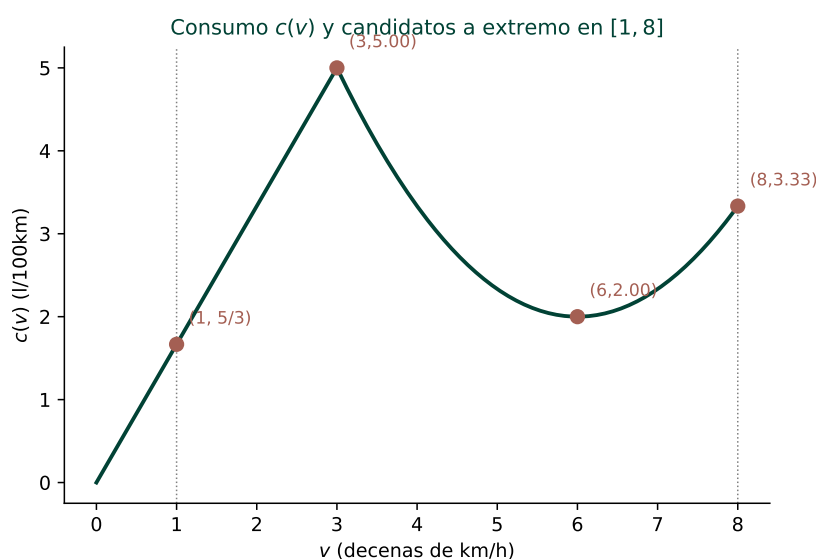


Figura 1: Función de consumo $c(v)$ y candidatos a extremo en $[1, 8]$.

Apartado a)

Para $v > 3$, usamos $c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}$. Derivamos e igualamos a cero:

$$c'(v) = -4 + \frac{2v}{3} = 0 \implies v = 6.$$

Como $c''(v) = \frac{2}{3} > 0$ (constante), se trata de un **mínimo**, y $v = 6 > 3$ está dentro del dominio de esta rama.

El **consumo mínimo** (para $v > 3$) se obtiene a $v = 6$ decenas de km/h, con $c(6) = 14 - 24 + 12 = 2$ l/100km.

Apartado b)

Idea clave

Como $c(v)$ no es derivable en $v = 3$ (cambia de expresión), los candidatos a extremo en $[1, 8]$ no son solo los puntos donde se anula la derivada: hay que añadir también los extremos del intervalo y el punto de cambio de definición.

Los candidatos a extremo son: los extremos del intervalo ($v = 1$ y $v = 8$), el punto donde cambia la definición ($v = 3$) y el punto crítico hallado en el apartado anterior ($v = 6$, que sigue siendo válido pues $6 \in [1, 8]$).

Evaluamos $c(v)$ en cada uno:

$$c(1) = \frac{5(1)}{3} = \frac{5}{3} \approx 1.67, \quad c(3) = 14 - 12 + 3 = 5,$$

$$c(6) = 2, \quad c(8) = 14 - 32 + \frac{64}{3} = \frac{10}{3} \approx 3.33.$$

Idea clave

Como c es continua en todo $[1, 8]$ (comprobamos que ambas ramas coinciden en $v = 3$: $\frac{5(3)}{3} = 5 = 14 - 12 + 3$) y el intervalo es cerrado y acotado, el teorema de Weierstrass garantiza que el máximo y el mínimo están entre estos candidatos.

Comparando los cuatro valores, el mayor es $c(3) = 5$ y el menor es $c(1) = \frac{5}{3}$.

El consumo máximo es 5 l/100km (en $v = 3$) y el mínimo es $\frac{5}{3}$ l/100km (en $v = 1$).

PREGUNTA A.3: Geometría del espacio (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(0, 0, 1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q .

a (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π .

b (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r , con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Como $\pi : z = 1$ y ambos puntos tienen tercera coordenada 1 ($P(1, 1, 1)$, $Q(0, 0, 1)$), **ambos pertenecen a π .**

Apartado b)

La recta r tiene dirección $\overrightarrow{QP} = (1, 1, 0)$.

Idea clave

Una recta paralela a r tiene la misma dirección; para que además esté contenida en el plano $z = 0$, basta con hacerla pasar por cualquier punto de ese plano, por ejemplo el origen.

La recta buscada es $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Apartado c)

Buscamos una recta s por $P(1, 1, 1)$ con dirección $\vec{d}_s = (1, 1, v_3)$: las dos primeras componentes deben ser proporcionales a $(1, 1)$ para que la proyección ortogonal de s sobre π (que “aplana” la componente z) coincida con la dirección de r , $(1, 1, 0)$.

Idea clave

La proyección ortogonal de s sobre el plano horizontal π consiste en anular la componente z de su vector director: por eso basta con que las dos primeras componentes de $\vec{d}_s$ sean proporcionales a las de $\vec{d}_r$.

Imponemos que el ángulo entre $\vec{d}_s = (1, 1, v_3)$ y $\vec{d}_r = (1, 1, 0)$ sea $\pi/4$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|\vec{d}_s \cdot \vec{d}_r|}{\|\vec{d}_s\| \|\vec{d}_r\|} = \frac{2}{\sqrt{2 + v_3^2} \cdot \sqrt{2}}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2} \sqrt{2 + v_3^2}} \implies \sqrt{2 + v_3^2} = 2 \implies 2 + v_3^2 = 4 \implies v_3 = \pm\sqrt{2}.$$

Hay dos rectas válidas:

$$s_1 \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 + \sqrt{2}\lambda), \quad s_2 \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, 1 - \sqrt{2}\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

PREGUNTA A.4: Probabilidad (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A | B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b (1 punto) $P(A | A \cup B)$ y $P(A \cap B | A \cup B)$.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

De $P(A | B) = 0.625$: $P(A \cap B) = 0.625 P(B)$.

Idea clave

Sustituimos esta expresión de $P(A \cap B)$ directamente en la fórmula de la unión, dejando $P(B)$ como única incógnita.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0.65 = 0.5 + P(B) - 0.625 P(B).$$

$$0.15 = 0.375 P(B) \implies P(B) = \frac{0.15}{0.375} = 0.4.$$

$$P(A \cap B) = 0.625(0.4) = 0.25.$$

$$P(B) = 0.4 \text{ y } P(A \cap B) = 0.25.$$

Apartado b)

Idea clave

Como $A \subseteq A \cup B$ y $(A \cap B) \subseteq A \cup B$, ambas intersecciones con $A \cup B$ son directamente A y $A \cap B$ respectivamente: esto simplifica mucho las expresiones.

$$P(A | A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.5}{0.65} = \frac{10}{13}.$$

$$P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0.25}{0.65} = \frac{5}{13}.$$

$$P(A | A \cup B) = \frac{10}{13} \text{ y } P(A \cap B | A \cup B) = \frac{5}{13}.$$

PREGUNTA B.1: Sistemas de ecuaciones con parámetro (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Dado el sistema

$$\begin{cases} -2x + y + kz = 1 \\ kx - y - z = 0 \\ -y + (k-1)z = 3, \end{cases}$$

se pide:

a (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k .

b (0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.

c (0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante:

$$|A| = 3k - 2k^2 = -k(2k - 3).$$

Igualamos a cero: $k = 0$ o $k = \frac{3}{2}$.

Si $k \neq 0$ y $k \neq \frac{3}{2}$: $|A| \neq 0$, el sistema es **compatible determinado**.

Si $k = 0$: puede comprobarse que $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|\vec{b}) = 3$: el sistema es **incompatible**.

Si $k = \frac{3}{2}$: puede comprobarse que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 2 < 3$: el sistema es **compatible indeterminado**.

Apartado b)

Para $k = 3$, el sistema es

$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \\ -y + 2z = 3. \end{cases}$$

Sumando la 1.^a y la 2.^a ecuación: $x + 2z = 1 \Rightarrow x = 1 - 2z$. De la 3.^a: $y = 2z - 3$.

Sustituyendo ambas en la 2.^a: $3(1 - 2z) - (2z - 3) - z = 0 \Rightarrow 3 - 6z - 2z + 3 - z = 0 \Rightarrow 6 - 9z = 0 \Rightarrow z = \frac{2}{3}$.

Con $z = \frac{2}{3}$: $x = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$; $y = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$.

Comprobación: $-2\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} + 2 = -1 + 2 = 1 \checkmark$.

La solución para $k = 3$ es $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Apartado c)

Para $k = \frac{3}{2}$, el sistema es compatible indeterminado. Tomando $z = t$ como parámetro:

De la 3.^a ecuación: $-y + \left(\frac{3}{2} - 1\right)t = 3 \Rightarrow -y + \frac{t}{2} = 3 \Rightarrow y = \frac{t}{2} - 3$.

De la 1.^a ecuación: $-2x + y + \frac{3}{2}t = 1$; sustituyendo y :

$$-2x + \left(\frac{t}{2} - 3\right) + \frac{3}{2}t = 1 \Rightarrow -2x + 2t - 3 = 1 \Rightarrow -2x = 4 - 2t \Rightarrow x = t - 2.$$

La solución general es $(x, y, z) = \left(t - 2, \frac{t}{2} - 3, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Idea clave

Para hallar la solución con $x = 2$, no hace falta resolver nada nuevo: basta con imponer $x = 2$ sobre la expresión general y despejar t .

Imponemos $x = 2$: $t - 2 = 2 \Rightarrow t = 4$. Entonces $y = \frac{4}{2} - 3 = 2 - 3 = -1$, $z = 4$.

Comprobación: $-2(2) + (-1) + \frac{3}{2}(4) = -4 - 1 + 6 = 1 \checkmark$.

La solución particular con $x = 2$ es $(x, y, z) = (2, -1, 4)$.

PREGUNTA B.2: Análisis: valor absoluto y área entre curvas (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Dadas las funciones $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ y $g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3$, se pide:

a (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.

b (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La gráfica de $f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ es una parábola invertida (coeficiente de x^2 negativo) con $f(0) = 2 > 0$, así que f tiene dos raíces reales, una negativa y una positiva:

$$f(x) = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Llamamos $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ y $b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ a estas raíces. Entre ellas, $f(x) > 0$; fuera, $f(x) < 0$. Por tanto:

$$h(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ -f(x) & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Idea clave

Como ambas ramas son polinómicas, h es derivable en todo punto salvo, quizás, en los puntos de cambio de rama ($x = a$ y $x = b$), donde hay que comprobar si las derivadas laterales coinciden.

Para que h sea derivable en $x = a$ o $x = b$, hace falta que $f'(x) = -f'(x)$ en ese punto (ya que a un lado $h = f$ y al otro $h = -f$), es decir, $f'(x) = 0$. Como $f'(x) = 2 - 4x$, esto ocurre únicamente en $x = \frac{1}{2}$.

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \neq 0$, el punto $x = \frac{1}{2}$ **no** es ninguna de las raíces a, b : por tanto, en los puntos reales de cambio de rama (a y b), las derivadas laterales de h **no** coinciden.

$h(x) = |f(x)|$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ excepto en $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (las raíces de f).

Apartado b)

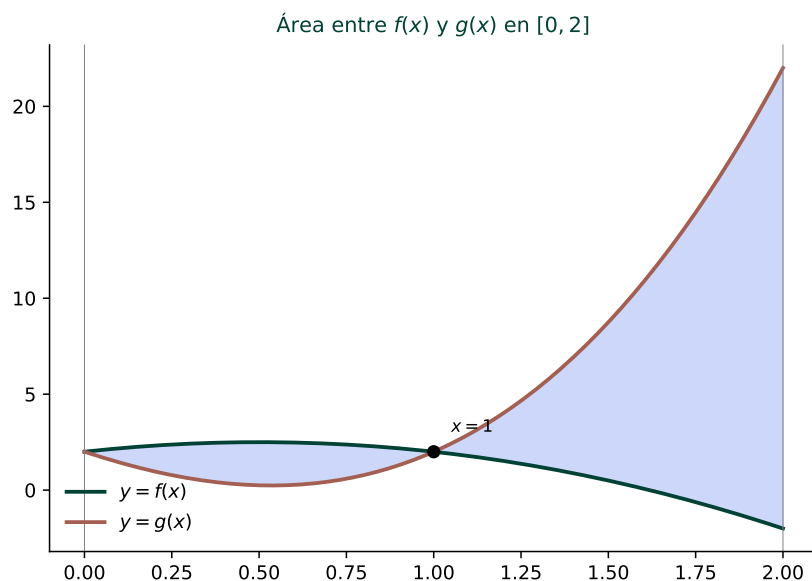


Figura 2: Área entre $f(x)$ y $g(x)$ en $[0, 2]$.

Calculamos la diferencia:

$$f(x) - g(x) = (2 + 2x - 2x^2) - (2 - 6x + 4x^2 + 2x^3) = -2x^3 - 6x^2 + 8x = -2x(x - 1)(x + 4).$$

Idea clave

Antes de integrar, localizamos dónde $f - g$ cambia de signo dentro de $[0, 2]$: la raíz $x = 1$ (las otras dos, $x = 0$ y $x = -4$, no están en el interior del intervalo o coinciden con su extremo).

Evaluando el signo: en $(0, 1)$, $f(x) - g(x) > 0$ (por ejemplo, en $x = 0.5$ vale $2.25 > 0$); en $(1, 2)$, $f(x) - g(x) < 0$ (en $x = 1.5$ vale $-8.25 < 0$).

El área total es

$$\text{Área} = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx.$$

$$\int_0^1 (-2x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[-\frac{x^4}{2} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^1 = -\frac{1}{2} - 2 + 4 = \frac{3}{2}.$$

$$\int_1^2 (2x^3 + 6x^2 - 8x) dx = \left[\frac{x^4}{2} + 2x^3 - 4x^2 \right]_1^2 = (8 + 16 - 16) - \left(\frac{1}{2} + 2 - 4 \right) = 8 - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{19}{2}.$$

$$\text{Área} = \frac{3}{2} + \frac{19}{2} = \frac{22}{2} = 11.$$

El área de la región es 11.

PREGUNTA B.3: Geometría del espacio: plano y proyecciones (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5, \end{cases}$ se pide:

a (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π .

c (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r , que esté contenida en π , y que corte al eje OZ .

SOLUCIÓN

El plano π tiene normal $\vec{n}_\pi = (1, 3, 2)$.

Apartado a)

Idea clave

El punto de un plano más cercano al origen es el pie de la perpendicular trazada desde el origen: la recta que pasa por el origen con dirección $\vec{n}_\pi$.

La recta perpendicular a π por el origen es $(x, y, z) = \lambda(1, 3, 2)$. Sustituimos en π :

$$\lambda + 3(3\lambda) + 2(2\lambda) + 14 = 0 \implies 14\lambda + 14 = 0 \implies \lambda = -1.$$

El punto más próximo al origen es $(-1, -3, -2)$.

Apartado b)

Idea clave

La proyección de una recta sobre un plano es, en general, otra recta, que se obtiene como intersección de π con el plano π' perpendicular a π que contiene a la recta original (aquí, el eje OZ).

El plano π' contiene al eje OZ (dirección $(0, 0, 1)$) y es perpendicular a π ; su normal es

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{n}_\pi \times (0, 0, 1) = (3, -1, 0).$$

Como π' pasa por el origen (que está en el eje OZ): $\pi' : 3x - y = 0$.

La proyección ortogonal del eje OZ sobre π es la recta intersección $\begin{cases} \pi : x + 3y + 2z = -14 \\ \pi' : 3x - y = 0. \end{cases}$

Apartado c)

La recta r (definida por $x = 2, z = 5$, con y libre) tiene dirección $\vec{d}_r = (0, 1, 0)$.

Idea clave

Para que la recta buscada, t , sea perpendicular a r y esté contenida en π , su dirección debe ser perpendicular tanto a $\vec{d}_r$ como a $\vec{n}_\pi$: de nuevo, el producto vectorial.

$$\vec{d}_t = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = (0, 1, 0) \times (1, 3, 2) = (1 \cdot 2 - 0 \cdot 3, 0 \cdot 1 - 0 \cdot 2, 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = (2, 0, -1).$$

Como t debe cortar al eje OZ , buscamos el punto donde π corta a dicho eje ($x = y = 0$):

$$2z + 14 = 0 \implies z = -7 \implies Q(0, 0, -7).$$

La recta buscada es $t \equiv (x, y, z) = (2\lambda, 0, -7 - \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$.

PREGUNTA B.4: Probabilidad: binomial y aproximación normal (2.5 puntos)

ENUNCIADO

El 65 % de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consiguen a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

SOLUCIÓN

Sea X el número de universitarios (de los 10) que aprueban a la primera, $X \sim B(10, 0.65)$.

Apartado a)

Idea clave

“Exactamente 3 necesitaron más de un intento” equivale a “exactamente 7 aprobaron a la primera” (ya que $10 - 3 = 7$).

$$P(X = 7) = \binom{10}{7} (0.65)^7 (0.35)^3 \approx 0.252.$$

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.252.

Apartado b)

Idea clave

“Alguno necesitó más de un intento” es el complementario de “todos aprobaron a la primera” ($X = 10$).

$$P(X < 10) = 1 - P(X = 10) = 1 - (0.65)^{10} \approx 1 - 0.013 = 0.987.$$

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.987.

Apartado c)

Sea $Y \sim B(60, 0.65)$ el número de universitarios (de 60) que aprueban a la primera. Aproximamos por

una normal:

$$Y' \sim N(\mu, \sigma), \quad \mu = np = 60(0.65) = 39, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60(0.65)(0.35)} = \sqrt{13.65} \approx 3.69.$$

Buscamos $P(Y \geq 30)$ (“como mínimo la mitad de 60”).

Idea clave

Al aproximar la binomial (discreta) por la normal (continua), aplicamos la corrección por continuidad: $P(Y \geq 30)$ se aproxima por $P(Y' \geq 29.5)$, no por $P(Y' \geq 30)$.

$$P(Y \geq 30) \approx P(Y' \geq 29.5) = P\left(Z \geq \frac{29.5 - 39}{3.69}\right) = P(Z \geq -2.57).$$

Por simetría, $P(Z \geq -2.57) = P(Z \leq 2.57) = 0.9949$.

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.9949.