

Prueba de Acceso a la Universidad
Comunidad Valenciana -- Extraordinaria 2024
Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Formato de este examen: elige 4 problemas de los 8 propuestos. Cada problema puntúa hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio es la suma de las calificaciones de los 4 problemas elegidos, dividida entre 4 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Idea clave

Este examen usa el formato anterior de la Comunidad Valenciana: 8 problemas independientes de los que solo se responden 4. Aquí resolvemos los 8, como recurso de repaso completo.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PROBLEMA 1: Matriz con parámetro, inversa y conmutación (10 puntos)**ENUNCIADO**

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde k es un número real.

- a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
- b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A . (4 puntos)
- c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Calculamos $|A|$ desarrollando por cofactores a lo largo de la primera fila (el primer término se anula porque $a_{11} = 0$):

$$|A| = 0 \cdot C_{11} + k \cdot C_{12} + 3 \cdot C_{13}.$$

Calculamos los cofactores necesarios:

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(k(-1) - 1(2)) = -(-k - 2) = k + 2,$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} k & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = k(-1) - \frac{1}{3}(2) = -k - \frac{2}{3}.$$

Sustituyendo:

$$|A| = k(k+2) + 3\left(-k - \frac{2}{3}\right) = k^2 + 2k - 3k - 2 = k^2 - k - 2.$$

Factorizamos: $k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1)$. La matriz es invertible cuando $|A| \neq 0$, es decir, para

$$k \neq 2 \quad \text{y} \quad k \neq -1.$$

b) Para $k = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| = 0^2 - 0 - 2 = -2 \neq 0$.

Idea clave

Calculamos la inversa mediante la matriz adjunta: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$, donde $\text{adj}(A) = C^T$ y C es la matriz de cofactores, $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Calculamos los 9 cofactores de A (con $k = 0$):

$$C_{11} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3},$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

La matriz de cofactores es $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y su traspuesta da la adjunta:

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dividiendo entre $|A| = -2$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Comprobación parcial: la tercera fila de A^{-1} multiplicada por la primera columna de A debe dar 1 (elemento diagonal de la identidad): $\frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 0 \dots$ en realidad conviene comprobar $A \cdot A^{-1} = I$ completo, o al menos una fila, antes de continuar al apartado c).

c) Buscamos matrices diagonales $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ tales que $AD = DA$. Calculamos ambos productos

con A (para $k = 0$).

Multiplicar A por D a la derecha escala cada **columna** j de A por d_j :

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3d_3 \\ 0 & \frac{d_2}{3} & d_3 \\ 2d_1 & -d_2 & -d_3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicar A por D a la izquierda escala cada **fila** i de A por d_i :

$$DA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3d_1 \\ 0 & \frac{d_2}{3} & d_2 \\ 2d_3 & -d_3 & -d_3 \end{pmatrix}.$$

Igualando entrada a entrada, las únicas condiciones no triviales son:

$$(1,3): 3d_3 = 3d_1 \Rightarrow d_1 = d_3, \quad (2,3): d_3 = d_2 \Rightarrow d_2 = d_3, \quad (3,1): 2d_1 = 2d_3 \Rightarrow d_1 = d_3 \text{ (repetida)}.$$

Idea clave

Las tres condiciones llevan todas a la misma conclusión: $d_1 = d_2 = d_3$. Es decir, la única forma de que una matriz diagonal conmute con esta A es que sea un múltiplo escalar de la identidad.

Las matrices buscadas son $D = \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 2: Ecuación matricial con parámetro (10 puntos)

ENUNCIADO

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

- Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)
- Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α , β y γ dependiendo del parámetro real a . (5 puntos)

SOLUCIÓN

a) La ecuación $A^2X = B$ tiene solución única exactamente cuando A^2 es invertible, es decir, cuando $\det(A^2) \neq 0$.

Idea clave

Como $\det(A^2) = (\det(A))^2$, esto es equivalente (y mucho más simple) a exigir $\det(A) \neq 0$: no hace falta calcular A^2 para responder a este apartado.

Calculamos $|A|$ desarrollando por la segunda columna, que solo tiene un elemento no nulo (el 2 en la

posición central):

$$|A| = 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 2(1 \cdot 3 - 2 \cdot a) = 2(3 - 2a) = 6 - 4a.$$

Por tanto, $|A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

La ecuación tiene solución única para todo $a \neq \frac{3}{2}$.

b) Como $A^2 X = B$ y nos dan directamente el vector $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ que la resuelve, basta calcular $B = A^2 X$;

no es necesario despejar ni invertir nada.

Primero calculamos $A^2 = A \cdot A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos cada fila del producto:

Fila 1: $(1, 0, 2) \cdot A = 1 \cdot (1, 0, 2) + 0 \cdot (3, 2, 1) + 2 \cdot (a, 0, 3) = (1 + 2a, 0, 2 + 6) = (1 + 2a, 0, 8)$.

Fila 2: $(3, 2, 1) \cdot A = 3(1, 0, 2) + 2(3, 2, 1) + 1(a, 0, 3) = (3 + 6 + a, 0 + 4 + 0, 6 + 2 + 3) = (9 + a, 4, 11)$.

Fila 3: $(a, 0, 3) \cdot A = a(1, 0, 2) + 0(3, 2, 1) + 3(a, 0, 3) = (a + 3a, 0, 2a + 9) = (4a, 0, 2a + 9)$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 + 2a & 0 & 8 \\ 9 + a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a + 9 \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Antes de multiplicar por X , observamos que la segunda columna de A^2 es $(0, 4, 0)^T$: al multiplicar por $X = (3, -2, -1)^T$, esa columna solo contribuye a través de su segunda componente. Esto ayuda a verificar el cálculo.

Ahora calculamos $B = A^2 X$, fila por fila:

$$\alpha = (1 + 2a)(3) + 0(-2) + 8(-1) = 3 + 6a - 8 = 6a - 5,$$

$$\beta = (9 + a)(3) + 4(-2) + 11(-1) = 27 + 3a - 8 - 11 = 3a + 8,$$

$$\gamma = (4a)(3) + 0(-2) + (2a + 9)(-1) = 12a - 2a - 9 = 10a - 9.$$

Por tanto:

$$\alpha = 6a - 5, \quad \beta = 3a + 8, \quad \gamma = 10a - 9.$$

PROBLEMA 3: Intersección de rectas y perpendicular común (10 puntos)

ENUNCIADO

Se dan las rectas $r : x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ y $s : \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$. Se pide:

- a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)
 b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s . (5 puntos)

SOLUCIÓN

De las ecuaciones continuas leemos los vectores directores: $\vec{d}_r = (1, 1, 2)$ y $\vec{d}_s = (-2, -1, 2)$.

a) Parametrizamos ambas rectas con parámetros distintos, λ para r y μ para s :

$$r : (1 + \lambda, 2 + \lambda, 1 + 2\lambda), \quad s : (3 - 2\mu, 3 - \mu, -1 + 2\mu).$$

Para que se corten, igualamos coordenada a coordenada:

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $\lambda = 1 - \mu$. Sustituyendo en la primera:

$$1 + (1 - \mu) = 3 - 2\mu \implies 2 - \mu = 3 - 2\mu \implies \mu = 1.$$

Entonces $\lambda = 1 - 1 = 0$. Comprobamos que estos valores satisfacen también la **tercera** ecuación (imprescindible, ya que solo hemos usado dos de las tres para despejar λ, μ):

$$1 + 2(0) = 1, \quad -1 + 2(1) = 1.$$

Como ambos lados coinciden ($1 = 1$), las tres ecuaciones son compatibles: las rectas efectivamente se cortan.

Idea clave

Este último paso es el que demuestra que realmente se cortan (no basta con resolver 2 de las 3 ecuaciones, ya que dos rectas que se cruzan sin tocarse también darían una solución para λ, μ usando solo dos coordenadas, pero fallarían en la tercera).

Sustituyendo $\lambda = 0$ en la parametrización de r :

$$P = (1 + 0, 2 + 0, 1 + 0) = (1, 2, 1).$$

b) La recta buscada pasa por P y su dirección debe ser perpendicular tanto a $\vec{d}_r$ como a $\vec{d}_s$; esa dirección es su producto vectorial:

$$\vec{d} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada componente:

$$\vec{i} : (1)(2) - (2)(-1) = 2 + 2 = 4,$$

$$\vec{j} : -[(1)(2) - (2)(-2)] = -(2 + 4) = -6,$$

$$\vec{k} : (1)(-1) - (1)(-2) = -1 + 2 = 1.$$

$$\vec{d} = (4, -6, 1).$$

La recta pedida, pasando por $P = (1, 2, 1)$ con dirección $(4, -6, 1)$, es:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}.$$

PROBLEMA 4: Plano con parámetro: distancia, intersecciones y ángulo (10 puntos)

ENUNCIADO

Sea el plano $\pi : 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

- Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)
- Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente. (3 puntos)
- Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

SOLUCIÓN

a) El vector normal de π es $\vec{n} = (6, 4, -3)$, con $|\vec{n}| = \sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61}$. La distancia del origen $(0, 0, 0)$ al plano $6x + 4y - 3z - d = 0$ es:

$$d(O, \pi) = \frac{|6(0) + 4(0) - 3(0) - d|}{\sqrt{61}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}.$$

Imponemos que valga 1:

$$\frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \implies |d| = \sqrt{61} \implies d = \sqrt{61} \text{ o } d = -\sqrt{61}.$$

b) El punto A (corte con el eje X) tiene $y = 0, z = 0$: $6x - d = 0 \implies x = \frac{d}{6}$, luego $A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$.

El punto B (corte con el eje Y) tiene $x = 0, z = 0$: $4y - d = 0 \implies y = \frac{d}{4}$, luego $B = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$.

El punto C (corte con el eje Z) tiene $x = 0, y = 0$: $-3z - d = 0 \implies z = -\frac{d}{3}$, luego $C = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$.

c) Calculamos los vectores pedidos:

$$\vec{AB} = B - A = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right), \quad \vec{AC} = C - A = \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right).$$

El producto escalar:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \left(-\frac{d}{6}\right)\left(-\frac{d}{6}\right) + \frac{d}{4} \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{d}{3}\right) = \frac{d^2}{36}.$$

Los módulos:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} = |d|\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{16}} = |d|\sqrt{\frac{4+9}{144}} = |d|\frac{\sqrt{13}}{12},$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}} = |d|\sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{9}} = |d|\sqrt{\frac{1+4}{36}} = |d|\frac{\sqrt{5}}{6}.$$

Aplicamos la fórmula del coseno:

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{\frac{d^2}{36}}{|d| \frac{\sqrt{13}}{12} \cdot |d| \frac{\sqrt{5}}{6}} = \frac{\frac{d^2}{36}}{d^2 \frac{\sqrt{65}}{72}} = \frac{72}{36\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{65}}{65}.$$

Idea clave

El parámetro d se cancela por completo en el cociente (aparece como d^2 arriba y abajo): el ángulo entre $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ **no depende** de qué plano concreto de la familia tomemos (siempre que $d \neq 0$), solo de la orientación fija del plano π .

$$\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{65}}{65}\right) \approx 75.64^\circ.$$

PROBLEMA 5: Función con parámetro, extremo dado y área entre curvas (10 puntos)

ENUNCIADO

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

- El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)
- Para el valor a del apartado anterior, dibujar las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)
- Calcular el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

SOLUCIÓN

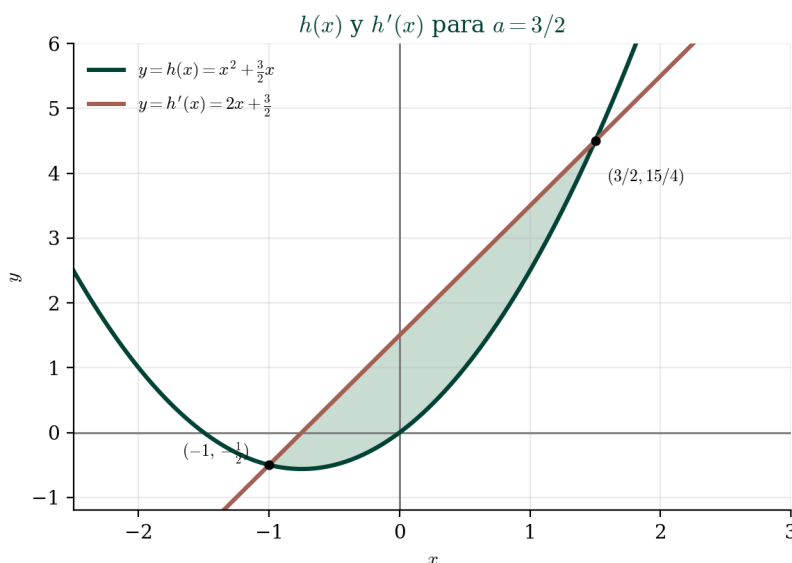
a) Derivamos: $h'(x) = a + 2x$. Un extremo relativo exige $h'(x) = 0$ en ese punto:

$$h'\left(-\frac{3}{4}\right) = a + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = a - \frac{3}{2} = 0 \implies a = \frac{3}{2}.$$

Idea clave

Falta comprobar que es efectivamente un **mínimo** (el enunciado lo da como dato, pero conviene verificarlo): $h''(x) = 2 > 0$ para cualquier x , así que toda la parábola es convexa y cualquier punto crítico es un mínimo. Se confirma que $a = \frac{3}{2}$ es coherente con el enunciado.

b) Con $a = \frac{3}{2}$: $h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$, y $h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$.



c) Para hallar el área entre las dos curvas, primero localizamos sus puntos de corte, resolviendo $h(x) = h'(x)$:

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \implies x^2 + \frac{3}{2}x - 2x - \frac{3}{2} = 0 \implies x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Multiplicando por 2 para quitar denominadores: $2x^2 - x - 3 = 0$. Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \implies x = -1 \text{ o } x = \frac{3}{2}.$$

Comprobamos cuál de las dos funciones queda por encima en el tramo $(-1, \frac{3}{2})$, evaluando en un punto intermedio, por ejemplo $x = 0$:

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = \frac{3}{2}.$$

Como $h'(0) > h(0)$, en todo el tramo $h'(x) \geq h(x)$ (las curvas solo se cruzan en los extremos -1 y $\frac{3}{2}$, así que el orden no cambia entre medias).

Idea clave

El área entre curvas se calcula integrando (función superior – función inferior); aquí, $h'(x) - h(x) = -(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}) = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} \right]_{-1}^{3/2}.$$

Evaluamos en $x = \frac{3}{2}$:

$$-\frac{(3/2)^3}{3} + \frac{(3/2)^2}{4} + \frac{3(3/2)}{2} = -\frac{27/8}{3} + \frac{9/4}{4} + \frac{9}{4} = -\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} = \frac{-18 + 9 + 36}{16} = \frac{27}{16}.$$

Evaluamos en $x = -1$:

$$-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3(-1)}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{4 + 3 - 18}{12} = -\frac{11}{12}.$$

Restamos:

$$\text{Área} = \frac{27}{16} - \left(-\frac{11}{12}\right) = \frac{27}{16} + \frac{11}{12}.$$

Reducimos a común denominador (m.c.m.(16, 12) = 48):

$$\text{Área} = \frac{81}{48} + \frac{44}{48} = \frac{125}{48} \approx 2.6042 \text{ u}^2.$$

PROBLEMA 6: Caja de volumen máximo (10 puntos)

ENUNCIADO

Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

- a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
- b) Dicho volumen. (2 puntos)

SOLUCIÓN

a) Al recortar un cuadrado de lado x en cada esquina y levantar los laterales, la base de la caja mide $(16 - 2x)$ por $(10 - 2x)$, y la altura es x . El volumen es:

$$V(x) = x(16 - 2x)(10 - 2x).$$

Idea clave

Antes de derivar, desarrollamos el producto para no complicar la derivada innecesariamente.

Desarrollamos $(16 - 2x)(10 - 2x) = 160 - 32x - 20x + 4x^2 = 4x^2 - 52x + 160$. Entonces:

$$V(x) = x(4x^2 - 52x + 160) = 4x^3 - 52x^2 + 160x.$$

Derivamos:

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160.$$

Igualamos a cero y simplificamos dividiendo por 4:

$$3x^2 - 26x + 40 = 0.$$

Aplicamos la fórmula general:

$$x = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4(3)(40)}}{2(3)} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 480}}{6} = \frac{26 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{26 \pm 14}{6}.$$

Las dos soluciones son $x = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} \approx 6.67$ y $x = \frac{12}{6} = 2$.

Idea clave

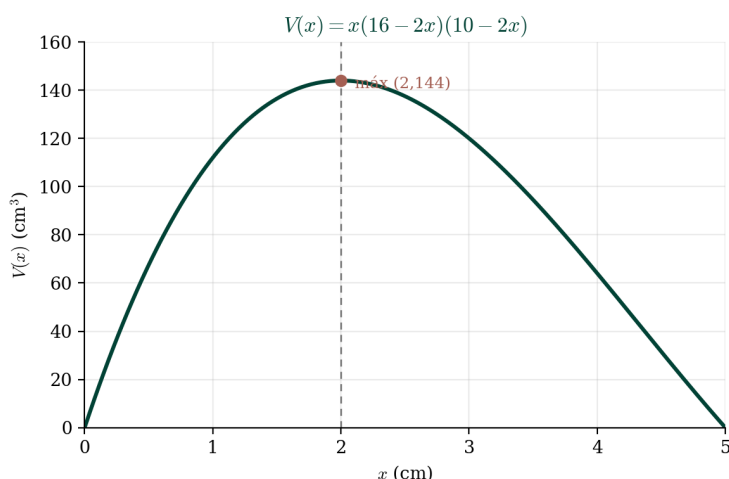
El dominio físico del problema exige $x > 0$ y, además, que ambos lados de la base sigan siendo positivos: $16 - 2x > 0$ y $10 - 2x > 0$, es decir, $x < 5$. La solución $x = \frac{20}{3} \approx 6.67$ queda fuera de

este dominio (mayor que 5) y se descarta directamente, sin necesidad de comprobar si es máximo o mínimo.

Comprobamos que $x = 2$ es un máximo con la segunda derivada:

$$V''(x) = 24x - 104, \quad V''(2) = 48 - 104 = -56 < 0,$$

lo que confirma un máximo relativo (y, dado que es el único punto crítico dentro del dominio $(0, 5)$, también es el máximo absoluto en ese intervalo).



Las dimensiones de la caja son:

$$\text{largo} = 16 - 2(2) = 12 \text{ cm}, \quad \text{ancho} = 10 - 2(2) = 6 \text{ cm}, \quad \text{altura} = 2 \text{ cm}.$$

b) El volumen máximo es:

$$V(2) = 12 \times 6 \times 2 = 144 \text{ cm}^3.$$

PROBLEMA 7: Probabilidad: control de calidad con 3 máquinas (10 puntos)

ENUNCIADO

Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25 % de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30 % de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10 % defectuosas. El 25 % de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5 % defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)
- Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)
- Si se escoge una lata al azar y es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

SOLUCIÓN

Denotamos M_1, M_2, M_3 los sucesos «la lata procede de la máquina 1, 2, 3» y D = «la lata es defectuosa».

Los datos son:

$$P(M_1) = 0.30, \quad P(D | M_1) = 0.10, \quad P(M_2) = 0.25, \quad P(D | M_2) = 0.05,$$

$$P(M_3) = 1 - 0.30 - 0.25 = 0.45 \quad (\text{el resto de la producción}), \quad P(D) = 0.1025.$$

a) Usamos el teorema de la probabilidad total, ya que M_1, M_2, M_3 forman una partición de todas las latas:

$$P(D) = P(M_1)P(D | M_1) + P(M_2)P(D | M_2) + P(M_3)P(D | M_3).$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\begin{aligned} 0.1025 &= (0.30)(0.10) + (0.25)(0.05) + (0.45)P(D | M_3) \\ &= 0.03 + 0.0125 + 0.45P(D | M_3) = 0.0425 + 0.45P(D | M_3). \end{aligned}$$

$$0.45P(D | M_3) = 0.1025 - 0.0425 = 0.06 \implies P(D | M_3) = \frac{0.06}{0.45} = \frac{2}{15} \approx 0.1333.$$

b) Necesitamos $P(M_1 | \bar{D})$, donde $\bar{D}$ = «no defectuosa». Por Bayes:

$$P(M_1 | \bar{D}) = \frac{P(M_1)P(\bar{D} | M_1)}{P(\bar{D})}.$$

Calculamos cada pieza: $P(\bar{D} | M_1) = 1 - 0.10 = 0.90$, y $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.1025 = 0.8975$.

$$P(M_1 | \bar{D}) = \frac{0.30 \times 0.90}{0.8975} = \frac{0.27}{0.8975} = \frac{108}{359} \approx 0.3008.$$

c) Necesitamos $P(\bar{M}_2 | D)$. Es más rápido calcular primero $P(M_2 | D)$ y restar a 1:

$$P(M_2 | D) = \frac{P(M_2)P(D | M_2)}{P(D)} = \frac{0.25 \times 0.05}{0.1025} = \frac{0.0125}{0.1025} = \frac{5}{41} \approx 0.1220.$$

$$P(\bar{M}_2 | D) = 1 - P(M_2 | D) = 1 - \frac{5}{41} = \frac{36}{41} \approx 0.8780.$$

PROBLEMA 8: Emoticonos en WhatsApp: distribución binomial (10 puntos)

ENUNCIADO

Se ha determinado que en el 60 % de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)
- Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)
- Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

SOLUCIÓN

Sea X = número de mensajes (de los 10) que llevan emoticono; como cada mensaje es independiente con

la misma probabilidad, $X \sim B(10, 0.6)$.

a)

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0.6)^0 (0.4)^{10} = (0.4)^{10} \approx 0.0001.$$

b) «Dos quintas partes de los diez mensajes» es $\frac{2}{5} \times 10 = 4$ mensajes:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} (0.6)^4 (0.4)^6.$$

Calculamos: $\binom{10}{4} = 210$, $(0.6)^4 = 0.1296$, $(0.4)^6 = 0.004096$.

$$P(X = 4) = 210 \times 0.1296 \times 0.004096 \approx 0.1115.$$

c) «Ocho o más» significa $X \geq 8$, es decir, $P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} (0.6)^8 (0.4)^2, \quad P(X = 9) = \binom{10}{9} (0.6)^9 (0.4)^1, \quad P(X = 10) = (0.6)^{10}.$$

Idea clave

Como $p = 0.6 > 0.5$, esta binomial tampoco está en la tabla adjunta; aquí, al pedirse solo 3 términos consecutivos (no una cola larga), es más directo calcular cada probabilidad puntual con la fórmula que traducir a la variable complementaria.

$$\binom{10}{8} = 45, \quad (0.6)^8 \approx 0.01680, \quad (0.4)^2 = 0.16 \Rightarrow P(X = 8) \approx 45 \times 0.01680 \times 0.16 \approx 0.1209.$$

$$\binom{10}{9} = 10, \quad (0.6)^9 \approx 0.01008, \quad (0.4)^1 = 0.4 \Rightarrow P(X = 9) \approx 10 \times 0.01008 \times 0.4 \approx 0.0403.$$

$$(0.6)^{10} \approx 0.00605 \Rightarrow P(X = 10) \approx 0.0060.$$

Sumando:

$$P(X \geq 8) \approx 0.1209 + 0.0403 + 0.0060 = 0.1673.$$