

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Andalucía -- Ordinaria 2021

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Acceso y Admisión a la Universidad – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Convocatoria Ordinaria, Curso 2020-2021.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.
- c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x - 1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

SOLUCIÓN

Idea clave

Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, la asíntota oblicua se obtiene dividiendo los polinomios: el cociente de la división da la ecuación de la recta asíntota (el resto no influye, ya que tiende a cero).

Dividimos $ax^2 + bx + 2$ entre $x - 1$:

$$ax^2 + bx + 2 = (x - 1)(ax + (a + b)) + (a + b + 2).$$

Por tanto:

$$f(x) = ax + (a + b) + \frac{a + b + 2}{x - 1}.$$

Como el último término tiende a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$, la asíntota oblicua es:

$$y = ax + (a + b).$$

Condición de la pendiente: la pendiente de la asíntota es el coeficiente de x , es decir, a . Igualamos a la pendiente dada:

$$a = 2.$$

Condición del punto (1, 1): sustituimos $x = 1$ en la ecuación de la asíntota y la igualamos a 1:

$$a(1) + (a + b) = 1 \implies 2 + 2 + b = 1 \implies b = 1 - 4 = -3.$$

Los valores pedidos son $a = 2$ y $b = -3$.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x - 6)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{36(\sin(x) - ax)}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Calcula a .

b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Como f es continua, el límite de la rama derecha cuando $x \rightarrow 0^+$ debe coincidir con $f(0)$ (que se calcula con la rama izquierda, ya que el enunciado incluye $x = 0$ en esa pieza).

Calculamos $f(0)$ con la primera rama:

$$f(0) = (3(0) - 6)e^0 = -6.$$

Llamamos $N(x) = 36(\sin(x) - ax)$ y $D(x) = x^3$. Sustituyendo $x = 0$: $N(0) = 36(0 - 0) = 0$, $D(0) = 0$: indeterminación $\frac{0}{0}$, para cualquier valor de a . Aplicamos L'Hôpital:

$$N'(x) = 36(\cos(x) - a), \quad D'(x) = 3x^2.$$

Evaluamos en $x = 0$: $N'(0) = 36(1 - a)$, $D'(0) = 0$.

Idea clave

Como el denominador de las derivadas vuelve a anularse, para que el límite sea finito el numerador también debe anularse en $x = 0$.

Imponemos $N'(0) = 0$: $1 - a = 0 \implies a = 1$.

Con $a = 1$, comprobamos que persiste $\frac{0}{0}$ ($N'(0) = D'(0) = 0$): aplicamos L'Hôpital una segunda vez:

$$N''(x) = -36 \operatorname{sen}(x), \quad D''(x) = 6x.$$

Evaluamos en $x = 0$: $N''(0) = 0$, $D''(0) = 0$. Persiste $\frac{0}{0}$: aplicamos L'Hôpital una tercera vez:

$$N'''(x) = -36 \cos(x), \quad D'''(x) = 6.$$

Evaluamos en $x = 0$: $N'''(0) = -36$, $D'''(0) = 6 \neq 0$. Ya podemos calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-36}{6} = -6.$$

Este límite coincide exactamente con $f(0) = -6$: la continuidad se cumple con $a = 1$.

El valor pedido es $a = 1$.

Apartado b)

Como $-1 \leq 0$, usamos la primera rama: $f(x) = (3x - 6)e^x$.

Calculamos $f(-1)$:

$$f(-1) = (3(-1) - 6)e^{-1} = -9e^{-1} = -\frac{9}{e}.$$

Derivamos con la regla del producto:

$$f'(x) = 3e^x + (3x - 6)e^x = e^x(3 + 3x - 6) = 3(x - 1)e^x.$$

Calculamos $f'(-1)$:

$$f'(-1) = 3(-1 - 1)e^{-1} = -6e^{-1} = -\frac{6}{e}.$$

La recta tangente pasa por $\left(-1, -\frac{9}{e}\right)$ con pendiente $-\frac{6}{e}$:

$$y + \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}(x + 1) \implies y = -\frac{6}{e}x - \frac{6}{e} - \frac{9}{e} = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}.$$

La recta tangente pedida es $y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}$.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

a) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) [1,5 puntos] Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Derivamos:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 4x^2(3 - x).$$

Igualamos a cero: $4x^2 = 0 \implies x = 0$ (raíz doble); $3 - x = 0 \implies x = 3$.

Idea clave

El factor $4x^2$ es siempre ≥ 0 (nunca negativo), y solo se anula en $x = 0$. Por tanto, el signo de $f'(x)$ depende exclusivamente del signo de $(3 - x)$, salvo en el propio punto $x = 0$, donde f' vale cero pero no cambia de signo a su alrededor (ya que $4x^2 \geq 0$ no introduce ningún cambio de signo).

Para $x < 3$ (incluyendo $x < 0$ y $0 < x < 3$): $3 - x > 0$, luego $f'(x) \geq 0$ (con igualdad solo en $x = 0$): **creciente**.

Para $x > 3$: $3 - x < 0$, luego $f'(x) < 0$: **decreciente**.

f es **creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$** . El punto $x = 0$ es un punto de tangente horizontal, pero no un extremo relativo (la función sigue creciendo a ambos lados). El único extremo es un máximo en $x = 3$, con valor $f(3) = 4(27) - 81 = 108 - 81 = 27$.

Apartado b)

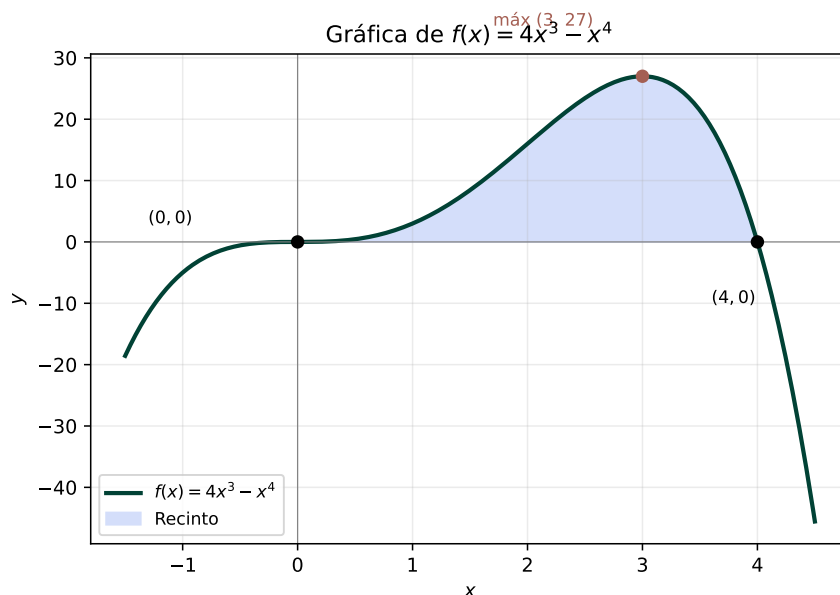
Buscamos los puntos de corte con el eje de abscisas:

$$4x^3 - x^4 = 0 \implies x^3(4 - x) = 0 \implies x = 0 \text{ (triple) o } x = 4.$$

Estudiamos el signo de f en los tramos que determinan estas raíces: en $x = -1$, $f(-1) = -4 - 1 = -5 < 0$; en $x = 1$, $f(1) = 4 - 1 = 3 > 0$; en $x = 5$, $f(5) = 500 - 625 = -125 < 0$.

Idea clave

Solo en el tramo $[0, 4]$ la función es no negativa (formando un recinto acotado con el eje); fuera de ese tramo, $f < 0$ y se extiende sin límite, por lo que no forma un recinto acotado.



Calculamos el área integrando en $[0, 4]$ (donde $f \geq 0$):

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx = \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \left(256 - \frac{1024}{5} \right) - 0 = \frac{1280}{5} - \frac{1024}{5} = \frac{256}{5}.$$

El área del recinto es $\frac{256}{5} \text{ u}^2 = 51,2 \text{ u}^2$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt.$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

SOLUCIÓN

Idea clave

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $F'(x)$ es directamente el integrando evaluado en x : no hace falta calcular primero $F(x)$ explícitamente para obtener la pendiente de la tangente, aunque si queremos el valor $F(1)$ (necesario para el punto de tangencia) sí debemos integrar.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$F'(x) = 2x + \sqrt{x}.$$

Calculamos $F(1)$ integrando explícitamente:

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt = \left[t^2 + \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^x = x^2 + \frac{2}{3} x^{3/2}.$$

$$F(1) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Calculamos la pendiente:

$$F'(1) = 2(1) + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3.$$

La recta tangente pasa por $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ con pendiente 3:

$$y - \frac{5}{3} = 3(x - 1) \implies y = 3x - 3 + \frac{5}{3} = 3x - \frac{4}{3}.$$

La recta tangente pedida es $y = 3x - \frac{4}{3}$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x + 3my = m + \frac{2}{5} \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Discute el sistema según los valores de m .

b) [1 punto] Resuelve el sistema para $m = 0$. ¿Hay alguna solución en la que $x = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & 3m & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $|A|$ desarrollando por la tercera fila:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 3m \begin{vmatrix} m & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 0.$$

Calculamos cada menor:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad \begin{vmatrix} m & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2m + 5.$$

Sustituyendo:

$$|A| = 1(0) - 3m(2m + 5) = -6m^2 - 15m = -3m(2m + 5).$$

Igualamos a cero: $m = 0$ o $m = -\frac{5}{2}$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq -\frac{5}{2}$: $|A| \neq 0$, el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Caso $m = 0$: comprobamos que $\text{rg}(A) = 2$ (hay menores 2×2 no nulos, por ejemplo $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$) y, verificando la matriz ampliada, $\text{rg}(A') = 2$ también. Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 2 < 3$: **compatible indeterminado (SCI)**.

Caso $m = -\frac{5}{2}$: comprobamos que $\text{rg}(A) = 2$, pero la matriz ampliada tiene $\text{rg}(A') = 3$: **incompatible (SI)**.

Valor de m	Tipo de sistema
$m \neq 0, m \neq -\frac{5}{2}$	Compatible determinado (SCD)
$m = 0$	Compatible indeterminado (SCI)
$m = -\frac{5}{2}$	Incompatible (SI)

Apartado b)

Para $m = 0$ (compatible indeterminado), el sistema queda:

$$\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 5x - 4y + 2z = 0 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Idea clave

La tercera ecuación, con $m = 0$, se reduce directamente a $x = \frac{2}{5}$ (ya que el término $3my$ se anula): esto fija x de forma única, sin depender de ningún parámetro.

De la tercera ecuación: $x = \frac{2}{5}$, un valor fijo (no depende de ningún parámetro).

Tomamos $z = t$ como parámetro. De la primera ecuación: $y = \frac{1+t}{2}$.

Idea clave

Como x está fijado en $\frac{2}{5}$ para *todas* las soluciones del sistema (no varía con el parámetro t), es imposible que exista una solución con $x = 0$: x nunca puede tomar ese valor.

La solución general es $(x, y, z) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1+t}{2}, t\right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

No existe ninguna solución con $x = 0$, ya que en todas las soluciones del sistema $x = \frac{2}{5}$ de forma constante (no depende del parámetro t).

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

SOLUCIÓN

Llamamos B , G , D al número de botellas, garrafas y bidones producidos cada hora.

Idea clave

Convertimos todo a las mismas unidades (gramos) antes de plantear la ecuación de materia prima:

10 kg = 10 000 g, y 1 kg por bidón = 1000 g.

$$50B + 100G + 1000D = 10\,000, \quad B = 2G, \quad B + G + D = 52.$$

Sustituimos $B = 2G$ en las otras dos ecuaciones.

En la primera (dividiendo antes entre 50 para simplificar):

$$B + 2G + 20D = 200 \implies 2G + 2G + 20D = 200 \implies 4G + 20D = 200 \implies G + 5D = 50. \quad (1)$$

En la tercera:

$$2G + G + D = 52 \implies 3G + D = 52 \implies D = 52 - 3G. \quad (2)$$

Sustituimos (2) en (1):

$$G + 5(52 - 3G) = 50 \implies G + 260 - 15G = 50 \implies -14G = -210 \implies G = 15.$$

Entonces:

$$D = 52 - 3(15) = 52 - 45 = 7, \quad B = 2(15) = 30.$$

Comprobación: $50(30) + 100(15) + 1000(7) = 1500 + 1500 + 7000 = 10\,000$ (correcto); $30 + 15 + 7 = 52$ (correcto); $30 = 2(15)$ (correcto).

Se producen 30 botellas, 15 garrafas y 7 bidones cada hora.

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

a) [1,5 puntos] Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1, 0, -5)$.

b) [1 punto] Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La recta s tiene dirección $\vec{d}_s = (-2, 1, 2)$.

Idea clave

Un plano perpendicular a una recta tiene como vector normal precisamente la dirección de esa recta.

El plano pedido tiene normal $\vec{d}_s = (-2, 1, 2)$ y pasa por $P(1, 0, -5)$:

$$-2(x - 1) + 1(y - 0) + 2(z + 5) = 0.$$

Desarrollamos:

$$-2x + 2 + y + 2z + 10 = 0 \implies -2x + y + 2z + 12 = 0.$$

El plano pedido es $-2x + y + 2z + 12 = 0$.

Apartado b)

La recta r viene dada como intersección de dos planos, con normales $\vec{n}_1 = (2, -3, 1)$ y $\vec{n}_2 = (-3, 2, 2)$. Su dirección es:

$$\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = ((-3)(2) - 1(2), -[2(2) - 1(-3)], 2(2) - (-3)(-3)) = (-8, -7, -5).$$

Idea clave

El ángulo entre una recta y un plano se calcula con el seno (no el coseno), usando el vector director de la recta y el normal del plano: $\text{sen}(\alpha) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{n}_\pi\|}$.

El plano π tiene normal $\vec{n}_\pi = (-2, 1, 2)$. Calculamos:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-8)(-2) + (-7)(1) + (-5)(2) = 16 - 7 - 10 = -1.$$

$$\|\vec{d}_r\| = \sqrt{64 + 49 + 25} = \sqrt{138}, \quad \|\vec{n}_\pi\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{|-1|}{\sqrt{138} \cdot 3} = \frac{1}{3\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{138}}{414}.$$

El seno del ángulo pedido es $\frac{\sqrt{138}}{414} \approx 0,0284$.

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

La recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{3}$ y la recta s , que pasa por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(a, 1, 0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

SOLUCIÓN

La recta r pasa por $P_0 = (-3, -4, 3)$ con dirección $\vec{d}_r = (2, 2, 3)$.

La recta s pasa por $P(1, 0, 2)$ con dirección $\vec{d}_s = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (a - 1, 1, -2)$.

Idea clave

Aquí la dirección de s depende del parámetro a (a través del punto Q), así que al igualar las parametrizaciones de r y s obtenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas: los dos parámetros de las rectas y el propio a .

Parametrizamos ambas rectas:

$$r : (-3 + 2t, -4 + 2t, 3 + 3t), \quad s : (1 + u(a - 1), u, 2 - 2u).$$

Igualamos coordenada a coordenada:

$$\begin{cases} -3 + 2t = 1 + u(a - 1) \\ -4 + 2t = u \\ 3 + 3t = 2 - 2u \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $u = 2t - 4$. Sustituimos en la tercera:

$$3 + 3t = 2 - 2(2t - 4) \implies 3 + 3t = 2 - 4t + 8 \implies 3 + 3t = 10 - 4t \implies 7t = 7 \implies t = 1.$$

Entonces $u = 2(1) - 4 = -2$.

Sustituimos en la primera ecuación para hallar a :

$$-3 + 2(1) = 1 + (-2)(a - 1) \implies -1 = 1 - 2a + 2 \implies -1 = 3 - 2a \implies 2a = 4 \implies a = 2.$$

Idea clave

Con t y a ya determinados, el punto de corte se obtiene sustituyendo $t = 1$ en la parametrización de r (y debe coincidir al sustituir $u = -2$ en la de s , lo que sirve como comprobación).

Calculamos el punto de corte con $t = 1$ en r :

$$(x, y, z) = (-3 + 2(1), -4 + 2(1), 3 + 3(1)) = (-1, -2, 6).$$

Comprobación con s ($a = 2, u = -2$): $\vec{d}_s = (1, 1, -2)$; punto = $(1 + (-2)(1), -2, 2 - 2(-2)) = (1 - 2, -2, 2 + 4) = (-1, -2, 6)$ (correcto), coincide.

El valor pedido es $a = 2$, y el punto de corte es $(-1, -2, 6)$.
