

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Extraordinaria 2024

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las **ocho** que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

Idea clave

Igual que en el examen anterior de este formato, resolvemos las ocho preguntas (A.1–A.4 y B.1–B.4), ya que el alumno puede elegir cualquier combinación de cuatro.

PREGUNTA A.1: Sistemas de ecuaciones (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

a (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ .

b (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

SOLUCIÓN

Escribimos el sistema como $A\vec{v} = \vec{b}$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$.

Apartado a)

Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera fila:

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 2) + [(\lambda - 1)^2 - 1] = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$: $|A| \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 3$: el sistema es **compatible determinado**.

Si $\lambda = 1$: puede comprobarse que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 2 < 3$: el sistema es **compatible indeterminado**.

Si $\lambda = 2$: puede comprobarse que $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|\vec{b}) = 3$: el sistema es **incompatible**.

Apartado b)

Para $\lambda = 1$, el sistema es

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Idea clave

Con tres ecuaciones independientes en apariencia pero rango 2, una de ellas es combinación de las otras. Aquí, de la segunda ecuación $z = 1$ ya se obtiene directamente el valor de z ; el resto se deja en función de un parámetro.

De la tercera ecuación, $x = -z$. Llamando $z = t$: $x = -t$, y de la primera, $y = 1 - t$. La solución general es

$$(x, y, z) = (-t, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para que $x = 5$: $-t = 5 \Rightarrow t = -5$. Entonces $y = 1 - (-5) = 6$, $z = -5$.

La solución con $x = 5$ es $(x, y, z) = (5, 6, -5)$.

PREGUNTA A.2: Análisis: funciones polinómicas de grado 2 (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

- a (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.
- b (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.
- c (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Buscamos $p(x) = ax^2 + bx + c$ tangente a $y = x$ en $(0, 0)$.

Idea clave

“Pasar por $(0, 0)$ ” fija c ; “ser tangente con la misma pendiente que $y = x$ ” fija b a través de la derivada en 0. El coeficiente a queda completamente libre.

Como $p(0) = 0$, necesitamos $c = 0$. Como $p'(x) = 2ax + b$ y la pendiente de $y = x$ es 1, necesitamos $p'(0) = b = 1$.

Un ejemplo válido es $p(x) = x^2 + x$ (y, en general, cualquier $p(x) = ax^2 + x$ con $a \neq 0$).

Apartado b)

Buscamos $p(x) = ax^2 + bx + c$ con máximo relativo en $(1, 1)$.

Idea clave

Para que sea un máximo (y no un mínimo), la parábola debe abrir hacia abajo: $a < 0$. Elegimos el caso más simple, $a = -1$.

Tomamos $p(x) = -x^2 + bx + c$. Imponemos $p(1) = 1$ y $p'(1) = 0$:

$$p'(x) = -2x + b, \quad p'(1) = -2 + b = 0 \Rightarrow b = 2.$$

$$p(1) = -1 + 2 + c = 1 \Rightarrow c = 0.$$

Un ejemplo válido es $p(x) = -x^2 + 2x$.

Comprobación: $p(1) = -1 + 2 = 1$ ✓; $p'(x) = -2x + 2$, $p'(1) = 0$ ✓; como $p''(x) = -2 < 0$, es efectivamente un máximo.

Apartado c)

No es posible. La derivada de una función polinómica de grado 2 es una función polinómica de grado 1 (una recta no constante), cuya gráfica solo puede cortar al eje x como máximo una vez. Por tanto, $p'(x) = 0$ tiene, a lo sumo, una solución real: una parábola solo puede tener un único extremo relativo (que además es siempre el extremo absoluto), nunca dos.

PREGUNTA A.3: Geometría del espacio (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$: **a (1 punto)** Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b (1.5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

SOLUCIÓN**Apartado a)****Idea clave**

Que P y Q sean simétricos respecto de un plano significa que dicho plano es perpendicular al segmento PQ y pasa por su punto medio.

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -4), \quad M = \left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 0, 1 \right).$$

El plano tiene normal $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -4)$ y pasa por M :

$$1 \left(x - \frac{3}{2} \right) + 2(y - 0) - 4(z - 1) = 0 \implies x + 2y - 4z + \frac{5}{2} = 0.$$

El plano buscado es $x + 2y - 4z = -\frac{5}{2}$.

Apartado b)

$$|PQ|^2 = 1^2 + 2^2 + (-4)^2 = 1 + 4 + 16 = 21.$$

Como la suma de los cuadrados de los tres lados es 34, y uno de ellos es $|PQ|^2 = 21$, necesitamos que los otros dos lados (los que unen el tercer vértice A con P y con Q) cumplan

$$|AP|^2 + |AQ|^2 = 34 - 21 = 13.$$

El punto A está en $r \equiv x - 2 = y = z$, así que parametrizamos $A = (2 + t, t, t)$.

$$|AP|^2 = (1 + t)^2 + (t + 1)^2 + (t - 3)^2, \quad |AQ|^2 = t^2 + (t - 1)^2 + (t + 1)^2.$$

Sumando y simplificando:

$$|AP|^2 + |AQ|^2 = 6t^2 - 2t + 13.$$

Idea clave

Al llegar a $6t^2 - 2t + 13 = 13$, el término independiente se cancela con el 13 del lado derecho, dejando una ecuación mucho más simple de lo que parecía al principio.

$$6t^2 - 2t + 13 = 13 \implies 6t^2 - 2t = 0 \implies 2t(3t - 1) = 0 \implies t = 0 \text{ o } t = \frac{1}{3}.$$

Si $t = 0$: $A = (2, 0, 0)$, que tiene dos coordenadas nulas: **descartado** por el enunciado.

Si $t = \frac{1}{3}$: $A = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, con las tres coordenadas no nulas: **válido**.

El tercer vértice es $A = \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

PREGUNTA A.4: Probabilidad (2.5 puntos)

ENUNCIADO

En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2 , de igual probabilidad 0.4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0.2). De cierto suceso B se sabe que $P(B | A_1) = P(B | A_2)$ y $P(B | A_3) = 2P(B | A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C | A_2) = 0.3$ y $P(C | A_3) = 0.6$. Con estos datos se pide:

a (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B | A_1) = 0.25$.

b (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2 .

SOLUCIÓN

Idea clave

Como A_1 y A_2 son incompatibles y A_3 es el complementario de su unión, los tres sucesos A_1, A_2, A_3 forman una partición completa del espacio muestral ($P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0.4 + 0.4 + 0.2 = 1$): esto es justamente lo que permite aplicar la probabilidad total con estos tres sucesos.

Apartado a)

Con $P(B | A_1) = P(B | A_2) = 0.25$ y $P(B | A_3) = 2(0.25) = 0.5$, aplicamos la probabilidad total:

$$P(B) = P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3).$$

$$P(B) = 0.25(0.4) + 0.25(0.4) + 0.5(0.2) = 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3.$$

$$P(B) = 0.3.$$

Apartado b)

Aplicamos de nuevo la probabilidad total sobre la misma partición, usando que C es independiente de A_1 (por lo que $P(C | A_1) = P(C)$):

$$P(C) = P(C | A_1)P(A_1) + P(C | A_2)P(A_2) + P(C | A_3)P(A_3) = P(C)(0.4) + 0.3(0.4) + 0.6(0.2).$$

$$P(C) = 0.4 P(C) + 0.12 + 0.12 = 0.4 P(C) + 0.24.$$

$$P(C)(1 - 0.4) = 0.24 \implies P(C) = \frac{0.24}{0.6} = 0.4.$$

$$P(C) = 0.4.$$

Para ver si C es independiente de A_2 , comparamos $P(C \cap A_2)$ con $P(C)P(A_2)$:

$$P(C \cap A_2) = P(C | A_2)P(A_2) = 0.3(0.4) = 0.12, \quad P(C)P(A_2) = 0.4(0.4) = 0.16.$$

Como $0.12 \neq 0.16$, C no es independiente de A_2 .

PREGUNTA B.1: Matrices y determinantes (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

no es cierta en general.

a (0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $\det(A + B) = \det A + \det B$, pruebe que entonces $\det((A + B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2 \det(AB)$.

b (1 punto) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $\det(C + D) = \det C + \det D$.

c (0.75 puntos) Para el valor $\alpha = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

SOLUCIÓN**Apartado a)****Idea clave**

No hace falta manipular matrices explícitas: basta con encadenar dos propiedades bien conocidas de los determinantes, más la hipótesis del enunciado.

Usamos que, para cualquier matriz cuadrada M , $\det(M^2) = \det(M)^2$, y que $\det(MN) = \det(M)\det(N)$:

$$\det((A+B)^2) = [\det(A+B)]^2.$$

Por hipótesis, $\det(A+B) = \det A + \det B$, así que

$$[\det(A+B)]^2 = (\det A + \det B)^2 = (\det A)^2 + (\det B)^2 + 2 \det A \det B.$$

Finalmente, $(\det A)^2 = \det(A^2)$, $(\det B)^2 = \det(B^2)$ y $\det A \det B = \det(AB)$:

$$\det((A+B)^2) = \det(A^2) + \det(B^2) + 2 \det(AB). \quad \blacksquare$$

Apartado b)

Calculamos cada determinante. Para D (constante, sin α):

$$\det D = 1(1-4) - 0 + 1(4+1) = -3 + 5 = 2.$$

Para C , desarrollando por la primera fila:

$$\det C = 1(\alpha - 0) - 0 + (-1)(-\alpha - 2) = \alpha + \alpha + 2 = 2\alpha + 2.$$

Para $C + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha + 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$, desarrollando por la primera fila (que solo tiene un término no nulo):

$$\det(C+D) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = 2[2(\alpha + 1) - 2] = 2(2\alpha) = 4\alpha.$$

Igualamos según la condición pedida:

$$4\alpha = (2\alpha + 2) + 2 \implies 4\alpha = 2\alpha + 4 \implies 2\alpha = 4 \implies \alpha = 2.$$

El único valor es $\alpha = 2$.

Apartado c)

Para $\alpha = -1$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Del apartado b), $\det C = 2(-1) + 2 = 0$, así que el sistema homogéneo $C\vec{v} = \vec{0}$ tiene soluciones no triviales (compatible indeterminado). Puede comprobarse que $\text{rg}(C) = 2$, así que la solución tiene un grado de libertad.

Resolviendo (por ejemplo, de la primera ecuación $x - z = 0 \Rightarrow x = z$; de la segunda, $-x + y = 0 \Rightarrow y = x$):

La solución es $(x, y, z) = (t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Comprobación: $C(t, t, t)^T = (t - t, -t + t, 2t - t - t)^T = (0, 0, 0)^T \checkmark$.

PREGUNTA B.2: Análisis: paridad, monotonía y área entre curvas (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a (0.75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b (1.75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x - 3)$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x).$$

f es impar.

Derivamos: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, que se anula en $x = \pm 1$. Como es una parábola hacia arriba, $f'(x) > 0$ fuera de $[-1, 1]$ y $f'(x) < 0$ dentro:

f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$.

Apartado b)

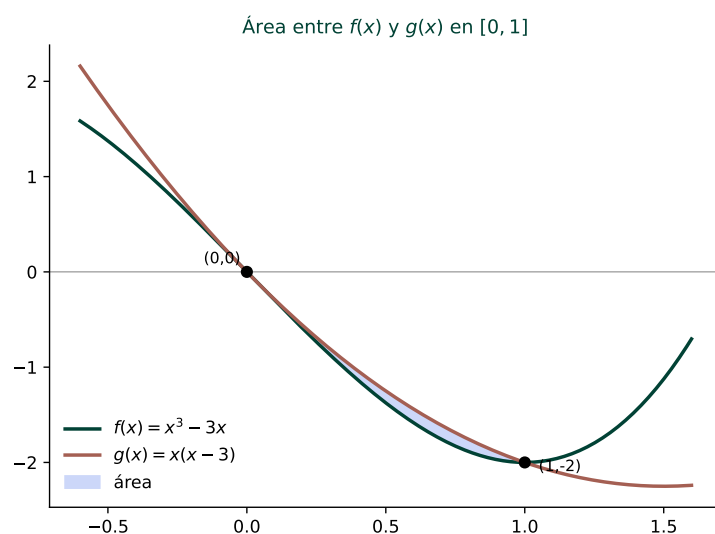


Figura 1: Área entre $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x(x - 3)$.

Buscamos los puntos de corte, $f(x) = g(x)$:

$$x^3 - 3x = x^2 - 3x \implies x^3 - x^2 = 0 \implies x^2(x - 1) = 0 \implies x = 0 \text{ (doble) o } x = 1.$$

Idea clave

Aunque $x = 0$ sea una raíz doble de $x^2(x - 1)$, sigue siendo un único punto de corte entre las gráficas: la única región acotada queda, por tanto, entre $x = 0$ y $x = 1$.

Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(1, -2)$ (ya que $f(1) = 1 - 3 = -2$).

Para saber qué gráfica queda por encima en $(0, 1)$, evaluamos en un punto intermedio, $x = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = -\frac{11}{8}, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 3\right) = -\frac{5}{4}.$$

Como $-\frac{5}{4} = -\frac{10}{8} > -\frac{11}{8}$, se tiene $g(x) > f(x)$ en $(0, 1)$. El área es

$$\text{Área} = \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^1 [(x^2 - 3x) - (x^3 - 3x)] dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx.$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

El área de la región es $\frac{1}{12}$.

PREGUNTA B.3: Geometría del espacio: rectas (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Dado el punto $P(5, -1, 2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3, \end{cases}$$

se pide:

a (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b (1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r .

SOLUCIÓN

Apartado a)

La recta r tiene dirección $\vec{d}_r = (3, -1, 1)$ y pasa por $P_r(2, -1, 0)$.

Idea clave

s está dada como intersección de dos planos: para obtener su dirección y un punto, la parametrizamos tomando $x = t$ como parámetro libre y despejando y, z de las dos ecuaciones.

De $x - y = 5 \Rightarrow y = x - 5$; de $x + z = 3 \Rightarrow z = 3 - x$. Con $x = t$:

$$s \equiv (x, y, z) = (t, t - 5, 3 - t), \quad \vec{d}_s = (1, 1, -1), \quad P_s = (0, -5, 3) \text{ (con } t = 0\text{)}.$$

Como $\vec{d}_r = (3, -1, 1)$ y $\vec{d}_s = (1, 1, -1)$ no son proporcionales, las rectas no son paralelas. Calculamos $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$ y el vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ para comprobar si se cortan o se cruzan:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = ((-1)(-1) - 1(1), 1(1) - 3(-1), 3(1) - (-1)(1)) = (0, 4, 4).$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (0, -5, 3) - (2, -1, 0) = (-2, -4, 3).$$

El producto mixto es

$$\overrightarrow{P_r P_s} \cdot (\vec{d}_r \times \vec{d}_s) = (-2)(0) + (-4)(4) + 3(4) = -16 + 12 = -4 \neq 0.$$

Como el producto mixto no es cero, las rectas **se cruzan** (no son coplanarias).

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_r P_s} \cdot (\vec{d}_r \times \vec{d}_s)|}{\|\vec{d}_r \times \vec{d}_s\|} = \frac{|-4|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Las rectas se cruzan, y la distancia entre ellas es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Apartado b)

Idea clave

La recta que pasa por P y corta perpendicularmente a r debe cortar a r en el punto donde el plano perpendicular a r que pasa por P se interseca con r : primero hallamos ese plano, luego el punto de corte con r , y finalmente la recta que une P con ese punto.

El plano perpendicular a r (normal $\vec{d}_r = (3, -1, 1)$) que pasa por $P(5, -1, 2)$ es

$$3(x - 5) - 1(y + 1) + 1(z - 2) = 0 \implies 3x - y + z - 18 = 0.$$

Parametrizamos r : $(2 + 3\lambda, -1 - \lambda, \lambda)$, y sustituimos en el plano:

$$3(2 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + \lambda - 18 = 0 \implies 6 + 9\lambda + 1 + \lambda + \lambda - 18 = 0 \implies 11\lambda - 11 = 0 \implies \lambda = 1.$$

El punto de corte es $(2 + 3, -1 - 1, 1) = (5, -2, 1)$.

La recta buscada pasa por $P(5, -1, 2)$ y por $(5, -2, 1)$, con dirección $(5, -2, 1) - (5, -1, 2) = (0, -1, -1)$:

La recta buscada es $(x, y, z) = (5, -1 + \alpha, 2 + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

PREGUNTA B.4: Probabilidad (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b (1.5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

SOLUCIÓN**Apartado a)****Idea clave**

Cada uno lanza 5 veces. Para que el resultado quede decidido ya después de solo 3 lanzamientos de cada uno ("sin llegar al cuarto"), hace falta que la diferencia de aciertos acumulada tras esas 3 tiradas sea tan grande que ni siquiera los 2 lanzamientos restantes de cada jugador puedan cambiar quién friega. Esto solo ocurre si uno de los dos acierta las 3 primeras y el otro falla las 3 primeras: un margen de 3 aciertos que, como mucho, el rezagado podría recortar en 2 (sus 2 tiros restantes), sin llegar nunca a igualar ni superar.

Los dos casos favorables son: Antonio acierta sus 3 primeros y Benito falla los suyos, o al revés.

$$P = \underbrace{(0.25)^3(0.7)^3}_{\text{Antonio 3 aciertos, Benito 0}} + \underbrace{(0.75)^3(0.3)^3}_{\text{Antonio 0 aciertos, Benito 3}}.$$

$$P = 0.015625 \cdot 0.343 + 0.421875 \cdot 0.027 \approx 0.00536 + 0.01139 = 0.01675.$$

La probabilidad pedida es 0.01675.

Apartado b)

Sea X el número de aciertos de Antonio en 60 lanzamientos, $X \sim B(60, 0.25)$. Fallar en "al menos dos terceras partes" de 60 lanzamientos significa fallar al menos 40 veces, es decir, acertar como mucho $60 - 40 = 20$ veces: buscamos $P(X \leq 20)$.

Aproximamos por una normal con

$$\mu = np = 60(0.25) = 15, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60(0.25)(0.75)} = \sqrt{11.25} \approx 3.354.$$

Idea clave

Al aproximar una variable discreta por una normal (continua), aplicamos la corrección por continuidad: $P(X \leq 20)$ se aproxima por $P(X' \leq 20.5)$, no por $P(X' \leq 20)$.

$$P(X \leq 20) \approx P(X' \leq 20.5) = P\left(Z \leq \frac{20.5 - 15}{3.354}\right) = P(Z \leq 1.64).$$

Buscando en la tabla: $P(Z \leq 1.64) \approx 0.9495$.

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.9495.