

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Extraordinaria 2021

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las **ocho** que se proponen.

Tiempo y calificación: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

Idea clave

Mismo formato que los exámenes anteriores de esta serie: resolvemos las ocho preguntas (A.1–A.4 y B.1–B.4).

PREGUNTA A.1: Sistemas de ecuaciones: seguidores en redes sociales (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25 % de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

SOLUCIÓN

Llamamos x , y , z al número de seguidores de Sara, Cristina y Jimena, respectivamente.

Primera condición. “Un total de 15000 seguidores”:

$$x + y + z = 15000.$$

Segunda condición. “Si Jimena perdiera el 25 % todavía tendría el triple que Sara”: le queda el 75 % de z , que debe ser el triple de x :

$$0.75z = 3x.$$

Tercera condición. “La mitad de Sara más la quinta parte de Cristina son la cuarta parte de Jimena”:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{z}{4}.$$

El sistema es

$$\begin{cases} x + y + z = 15000 \\ 0.75z = 3x \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $z = 4x$.

Idea clave

Con $z = 4x$, la tercera y la primera ecuación quedan ambas en función de solo x e y : sustituimos y resolvemos ese sistema reducido de dos ecuaciones.

Sustituyendo en la primera: $x + y + 4x = 15000 \Rightarrow y = 15000 - 5x$.

Sustituyendo $z = 4x$ en la tercera: $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = \frac{4x}{4} = x \Rightarrow \frac{y}{5} = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow y = \frac{5x}{2}$.

Igualando las dos expresiones de y :

$$15000 - 5x = \frac{5x}{2} \Rightarrow 15000 = 5x + \frac{5x}{2} = \frac{15x}{2} \Rightarrow x = 2000.$$

Con $x = 2000$: $y = \frac{5(2000)}{2} = 5000$; $z = 4(2000) = 8000$.

Comprobación: $2000 + 5000 + 8000 = 15000$ ✓; $0.75(8000) = 6000 = 3(2000)$ ✓; $\frac{2000}{2} + \frac{5000}{5} = 1000 + 1000 = 2000 = \frac{8000}{4}$ ✓.

Sara tiene 2000 seguidores, Cristina 5000 y Jimena 8000.

PREGUNTA A.2: Análisis: límites e integrales (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

a.1 (0.5 puntos) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - 2x)}{x - 2x^2 - \sin x}$.

a.2 (0.75 puntos) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin \frac{1}{x}} \right)$ (indicación: use el cambio de variable $t = 1/x$ donde sea necesario).

b.1 (0.5 puntos) $\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$.

b.2 (0.75 puntos) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

SOLUCIÓN

Apartado a.1)

El numerador y el denominador tienden a 0 cuando $x \rightarrow 0$ (indeterminación $\frac{0}{0}$). Aplicamos L'Hôpital:

Idea clave

Tras la primera aplicación de L'Hôpital seguimos teniendo una indeterminación $\frac{0}{0}$ (el denominador vuelve a anularse en $x = 0$), así que hay que aplicar la regla una segunda vez.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x^3}{x - 2x^2 - \sin x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 6x^2}{1 - 4x - \cos x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 12x}{-4 + \sin x} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}.$$

El límite vale $-\frac{1}{2}$.

Apartado a.2)

Hacemos el cambio $t = 1/x$: cuando $x \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0^+$. La expresión se convierte en

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \left(3t - \frac{2}{\sin t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t^2 \sin t - 2t}{\sin t}.$$

Idea clave

Con $t \rightarrow 0$, tanto el numerador como el denominador tienden a 0: de nuevo L'Hôpital.

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{6t \sin t + 3t^2 \cos t - 2}{\cos t} = \frac{0 + 0 - 2}{1} = -2.$$

El límite vale -2 .

Apartado b.1)**Idea clave**

El numerador es (salvo una constante) la derivada del denominador: $\frac{d}{dx}(x^2 - 1) = 2x$. Esto sugiere directamente una primitiva logarítmica.

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C.$$

Apartado b.2)

Integramos por partes dos veces. Primero, $u = x^2$, $dv = e^{-x} dx$, de donde $du = 2x dx$, $v = -e^{-x}$:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx.$$

Para $\int x e^{-x} dx$, otra vez por partes con $u = x$, $dv = e^{-x} dx$, $du = dx$, $v = -e^{-x}$:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}.$$

Juntando:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left[-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} \right]_0^1 = -5e^{-1} - (-2) = 2 - \frac{5}{e}.$$

El valor de la integral es $2 - \frac{5}{e}$.

PREGUNTA A.3: Geometría del espacio (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Dado el punto $A(1, 0, -1)$, la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \frac{z - 2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 6$, se pide:

a (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A .

b (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π .

c (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A , forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π .

SOLUCIÓN

La recta r tiene dirección $\vec{d}_r = (1, 1, 2)$ y pasa por $P_r(1, -1, 2)$. El plano π tiene normal $\vec{n}_\pi = (1, 1, -1)$.

Apartado a)

Idea clave

El plano α perpendicular a r que pasa por A tiene, como vector normal, precisamente la dirección de r : $\vec{n}_\alpha = \vec{d}_r = (1, 1, 2)$.

El ángulo entre π y α se calcula con el coseno del ángulo entre sus normales:

$$\cos(\pi, \alpha) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{n}_\pi\| \|\vec{n}_\alpha\|} = \frac{|1 + 1 - 2|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{0}{\sqrt{18}} = 0.$$

Como el coseno es 0, los planos π y α son perpendiculares (ángulo de 90°).

Apartado b)

Idea clave

Antes de hablar de “la” distancia entre una recta y un plano, hay que comprobar que son paralelos (si se cortaran, la distancia sería 0).

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Como el producto escalar es 0, r es paralela a π (puede comprobarse que $P_r \notin \pi$, así que no está contenida). La distancia de r a π es la distancia de cualquier punto de r al plano:

$$d(r, \pi) = \frac{|1 - 1 - 2 - 6|}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

La distancia entre r y π es $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Apartado c)

Buscamos una recta s por A perpendicular a r (dirección $\vec{d}_s \perp \vec{d}_r$) que no corte a π , es decir, que sea paralela a π ($\vec{d}_s \perp \vec{n}_\pi$ también).

Idea clave

Necesitamos una dirección perpendicular simultáneamente a $\vec{d}_r$ y a $\vec{n}_\pi$: el producto vectorial de ambos.

$$\vec{d}_s = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = (1, 1, 2) \times (1, 1, -1) = (1(-1) - 2(1), 2(1) - 1(-1), 1(1) - 1(1)) = (-3, 3, 0).$$

Simplificando (dividiendo por -3): $\vec{d}_s = (1, -1, 0)$.

Comprobamos que $A(1, 0, -1)$ no pertenece a π : $1 + 0 - (-1) = 2 \neq 6$, así que la recta (paralela a π , por $A \notin \pi$) efectivamente no corta al plano.

La recta buscada es $s \equiv x - 1 = -y = \frac{z+1}{0}$, es decir, $(x, y, z) = (1 + \lambda, -\lambda, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

PREGUNTA A.4: Probabilidad: extracciones sin reemplazamiento parcial (2.5 puntos)

ENUNCIADO

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

b (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

SOLUCIÓN

Denotamos B_1, N_1 (color de la primera extracción) y B_2, N_2 (color de la segunda). Inicialmente hay 2 blancas y 4 negras (6 en total).

Idea clave

La composición de la urna en la segunda extracción depende de lo que ocurrió en la primera: si salió blanca, la urna pasa a tener 3 blancas y 4 negras (7 bolas); si salió negra, pasa a tener 2 blancas y 3 negras (5 bolas, ya que la negra no se devuelve).

$$P(B_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(N_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$P(N_2 | B_1) = \frac{4}{7} \quad (\text{urna: } 3B, 4N), \quad P(B_2 | N_1) = \frac{2}{5} \quad (\text{urna: } 2B, 3N).$$

Apartado a)

“Distinto color” significa $B_1 \cap N_2$ o $N_1 \cap B_2$:

$$P(B_1 \cap N_2) = P(B_1)P(N_2 | B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{21}.$$

$$P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P(B_2 | N_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Sumando (denominador común 105): $\frac{4}{21} = \frac{20}{105}$, $\frac{4}{15} = \frac{28}{105}$:

$$P(\text{distinto color}) = \frac{20}{105} + \frac{28}{105} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35} \approx 0.457.$$

La probabilidad pedida es $\frac{16}{35} \approx 0.457$.

Apartado b)

Buscamos $P(N_1 | B_2)$. Necesitamos primero $P(B_2)$ por el teorema de la probabilidad total:

$$P(B_2 | B_1) = \frac{3}{7} \quad (\text{urna: } 3B, 4N \text{ tras devolver blanca y añadir otra}).$$

$$P(B_2) = P(B_2 | B_1)P(B_1) + P(B_2 | N_1)P(N_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{7} + \frac{4}{15}.$$

Con denominador común 105: $\frac{1}{7} = \frac{15}{105}$, $\frac{4}{15} = \frac{28}{105}$:

$$P(B_2) = \frac{15 + 28}{105} = \frac{43}{105}.$$

Por la regla de Bayes:

$$P(N_1 | B_2) = \frac{P(N_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{4/15}{43/105} = \frac{4}{15} \cdot \frac{105}{43} = \frac{28}{43} \approx 0.651.$$

La probabilidad pedida es $\frac{28}{43} \approx 0.651$.

PREGUNTA B.1: Sistemas de ecuaciones: construcción de ejemplos (2.5 puntos)

ENUNCIADO

a (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y , que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.

b (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x , y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$: $(x, y, z) = (\lambda, \lambda - 2, \lambda - 1)$.

c (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y , que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Como los dos puntos dados, $(1, 2)$ y $(0, 0)$, están ambos sobre la recta $y = 2x$, cualquier sistema de dos ecuaciones que describa esa misma recta (de forma redundante) tendrá infinitas soluciones, incluyendo estas dos.

Un sistema válido es:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$$

Ambas ecuaciones describen la recta $y = 2x$: se comprueba que $(1, 2)$ la verifica ($2(1) = 2 \cdot 1$) y $(0, 0)$ también ($2(0) = 0 \cdot 1$).

Apartado b)

Idea clave

Eliminamos el parámetro λ despejándolo de una ecuación y sustituyéndolo en las otras dos, para obtener relaciones directas entre x , y y z .

Como $x = \lambda$: sustituyendo en $y = \lambda - 2$ y en $z = \lambda - 1$:

$$y = x - 2 \implies x - y = 2, \quad z = x - 1 \implies x - z = 1.$$

Un sistema válido es:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1. \end{cases}$$

Apartado c)

Idea clave

Con dos ecuaciones independientes ya alcanzamos una solución única; la tercera ecuación debe ser compatible con esa misma solución (puede ser, por ejemplo, redundante respecto a una de las otras dos).

Un sistema válido es:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6. \end{cases}$$

La segunda y la tercera ecuación son equivalentes (la tercera es el doble de la segunda), así que en realidad el sistema equivale a las dos primeras: de $2x = y$ y $x + y = 3$, sustituyendo, $x + 2x = 3 \implies x = 1, y = 2$, la única solución.

PREGUNTA B.2: Análisis: valor absoluto, extremos y área (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Sea la función $f(x) = x^3 - |x| + 2$.

a (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f , el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

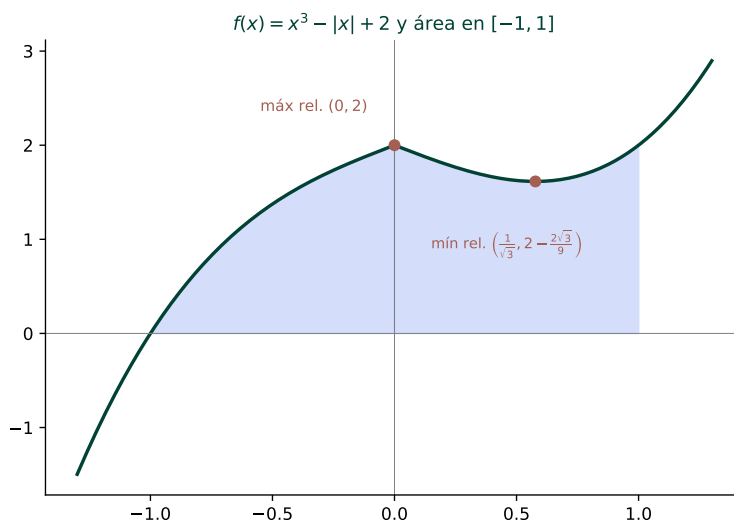
SOLUCIÓN

Figura 1: $f(x) = x^3 - |x| + 2$: máximo relativo en $(0, 2)$ y mínimo en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9})$.

Escribimos f explícitamente por trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x + 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Apartado a)

f es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas (x^3 , $-|x|$, constante) en todo punto.

Estudiamos las derivadas laterales en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1.$$

Como las derivadas laterales no coinciden ($-1 \neq 1$), f no es derivable en $x = 0$.

Apartado b)

Idea clave

Como f tiene un “pico” (no derivable) en $x = 0$, ese punto es un candidato natural a extremo relativo, aunque no se pueda detectar con $f'(0) = 0$: hay que compararlo directamente con los valores cercanos.

En $x = 0$: para $x < 0$, $f(x) - f(0) = x^3 + x = x(x^2 + 1) < 0$ (ya que $x < 0$ y $x^2 + 1 > 0$). Para $x \in (0, 1)$, $f(x) - f(0) = x^3 - x = x(x - 1)(x + 1) < 0$ (producto de un positivo, un negativo y un positivo). Por tanto, $f(x) < f(0)$ a ambos lados cerca de 0:

f alcanza un máximo relativo en $(0, 2)$.

Para $x < 0$: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ siempre, así que f es creciente en $(-\infty, 0)$ y no hay más extremos ahí.

Para $x > 0$: $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (la raíz negativa no cuenta, pues estamos en $x > 0$).

$$f''(x) = 6x, \quad f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} > 0.$$

f alcanza un mínimo relativo en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, con valor

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 = 2 - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Apartado c)

Idea clave

Antes de integrar, factorizamos cada trozo para comprobar su signo en $[-1, 0]$ y $[0, 1]$, y así saber si el área es directamente la integral (sin valor absoluto) o si hay que dividir en más partes.

Para $x \in [-1, 0]$: $f(x) = x^3 + x + 2 = (x+1)(x^2 - x + 2)$. Como $x^2 - x + 2 > 0$ siempre (discriminante negativo) y $x+1 \geq 0$ en $[-1, 0]$, se tiene $f(x) \geq 0$ en este tramo.

Para $x \in [0, 1]$: comparando con el mínimo hallado en b), $f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$ (ya que $2\sqrt{3} \approx 3.46 < 9$).

Como $f(x) \geq 0$ en todo $[-1, 1]$, el área es directamente la integral:

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^3 - x + 2) dx.$$

$$\int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 \right) = 0 - \left(-\frac{5}{4} \right) = \frac{5}{4}.$$

$$\int_0^1 (x^3 - x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 \right) - 0 = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Área} = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

El área de la región es 3.

PREGUNTA B.3: Geometría del espacio: perpendicular común (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}$, $s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1, \end{cases}$

a (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s .

b (1 punto) Calcule la distancia entre r y s .

SOLUCIÓN

La recta r pasa por $P(2, -1, -4)$ con dirección $\vec{u} = (1, 1, -3)$.

Parametrizamos s (tomando $z = t$): de $x + z = 2 \Rightarrow x = 2 - t$; de $-2x + y - 2z = 1 \Rightarrow y = 1 + 2(2 - t) + 2t = 5$ (constante). Así, s pasa por $Q(2, 5, 0)$ (con $t = 0$) con dirección $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

Apartado a)

Idea clave

La perpendicular común a dos rectas que se cruzan tiene, como dirección, el producto vectorial de las direcciones de ambas: es perpendicular a las dos a la vez.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, -3) \times (-1, 0, 1) = (1(1) - (-3)(0), (-3)(-1) - 1(1), 1(0) - 1(-1)) = (1, 2, 1).$$

Idea clave

La perpendicular común se obtiene como intersección de dos planos: el plano π que contiene a r y a la dirección $\vec{w}$, y el plano τ que contiene a s y a la dirección $\vec{w}$.

El plano π pasa por $P(2, -1, -4)$ con direcciones $\vec{u}$ y $\vec{w}$:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies 7x - 4y + z - 14 = 0.$$

El plano τ pasa por $Q(2, 5, 0)$ con direcciones $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Usando el punto $Q(1, 5, 1)$ de s (con $t = 1$, igualmente válido):

$$\tau \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-5 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies -2x + 2y - 2z - 6 = 0 \implies x - y + z + 3 = 0.$$

La recta perpendicular común es $\begin{cases} 7x - 4y + z - 14 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0. \end{cases}$

Apartado b)

Idea clave

La distancia entre dos rectas que se cruzan es el módulo de la proyección del vector que une un punto de cada una sobre la dirección de la perpendicular común, $\vec{w}$.

Con $P(2, -1, -4)$, $Q(1, 5, 1)$: $\overrightarrow{PQ} = (-1, 6, 5)$.

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|} = \frac{|(-1)(1) + 6(2) + 5(1)|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{|-1 + 12 + 5|}{\sqrt{6}} = \frac{16}{\sqrt{6}} = \frac{16\sqrt{6}}{6} = \frac{8\sqrt{6}}{3} \approx 6.53.$$

La distancia entre r y s es $\frac{8\sqrt{6}}{3} \approx 6.53$.

PREGUNTA B.4: Probabilidad: binomial y aproximación normal (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Sea X el número de días (de los 100) en los que ha llovido. Como cada día llueve con probabilidad $p = 0.45$, independientemente, $X \sim B(100, 0.45)$.

La probabilidad exacta es:

$$P(X = 40) = \binom{100}{40} (0.45)^{40} (0.55)^{60}.$$

Apartado b)

Aproximamos por una normal:

$$\mu = np = 100(0.45) = 45, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100(0.45)(0.55)} = \sqrt{24.75} \approx 4.97.$$

Idea clave

Al aproximar una probabilidad puntual $P(X = 40)$ (variable discreta) por una normal (continua), aplicamos la corrección por continuidad, sustituyendo el punto 40 por el intervalo $[39.5, 40.5]$.

$$P(X = 40) \approx P(39.5 \leq X' \leq 40.5) = P\left(\frac{39.5 - 45}{4.97} \leq Z \leq \frac{40.5 - 45}{4.97}\right) = P(-1.11 \leq Z \leq -0.90).$$

Usando la simetría de la normal: $P(Z \leq -0.90) = 1 - P(Z \leq 0.90) = 1 - 0.8159 = 0.1841$; $P(Z \leq -1.11) = 1 - P(Z \leq 1.11) = 1 - 0.8665 = 0.1335$.

$$P(-1.11 \leq Z \leq -0.90) = 0.1841 - 0.1335 = 0.0506.$$

La probabilidad aproximada es 0.0506.