

Prueba de Acceso a la Universidad
Comunidad Valenciana -- Extraordinaria 2025
Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Cada pregunta puntúa hasta 2,5 puntos. La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto.

Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las 3/5 partes de sus publicaciones reciben un «Like». Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún «Like» si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos «Likes» en sus cuatro publicaciones?

1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un «Like» sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

SOLUCIÓN

Sea $p = P(\text{Like}) = \frac{3}{5} = 0.6$ la probabilidad de que una publicación reciba un «Like», y $q = 1 - p = \frac{2}{5} = 0.4$ la de que no lo reciba. Cada publicación se comporta como un ensayo de Bernoulli independiente.

1.1 (0.75 puntos)

Que no reciba ningún «Like» en 4 publicaciones equivale a que las 4 fallen, sucesos independientes:

$$P(\text{ningún Like}) = q^4 = 0.4^4 = 0.0256.$$

1.2 (0.75 puntos)

Sea X = número de «Likes» en 4 publicaciones; $X \sim B(4, 0.6)$. Queremos $P(X \leq 2)$.

Idea clave

La tabla adjunta no tiene columna para $p = 0.6$. Como cada publicación recibe «Like» o no lo recibe, si Y = número de publicaciones *sin* Like, entonces $Y = 4 - X \sim B(4, 0.4)$ (sí está en la tabla), y $X \leq 2 \Leftrightarrow Y \geq 2$.

$$P(X \leq 2) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - F_Y(1).$$

Leyendo la tabla (fila $n = 4$, columna $p = 0.40$): $F_Y(1) = 0.4752$. Por tanto:

$$P(X \leq 2) = 1 - 0.4752 = 0.5248.$$

1.3 (1 punto)

Si sube n publicaciones, la probabilidad de no recibir ningún «Like» es $q^n = 0.4^n$, así que la de recibir al menos uno es $1 - 0.4^n$. Necesitamos:

$$1 - 0.4^n > 0.999 \Leftrightarrow 0.4^n < 0.001.$$

Tomando logaritmos (la desigualdad no cambia de sentido porque $0.4 < 1$... con cuidado del signo):

$$n > \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.4)} \approx \frac{-6.9078}{-0.9163} \approx 7.54.$$

Idea clave

Al dividir por $\ln(0.4)$, que es negativo, la desigualdad cambia de sentido: por eso pasamos de " $<$ " a " $>$ ".

Como n debe ser un número entero de publicaciones, y 7.54 no es entero, el menor n que cumple la condición es $n = 8$. Comprobamos:

$$1 - 0.4^7 = 1 - 0.0016384 = 0.9983616 < 0.999, \quad 1 - 0.4^8 = 1 - 0.00065536 = 0.9993446 > 0.999.$$

El menor número de publicaciones es 8.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2.5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

Opción 2.1

ENUNCIADO

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$. Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$.

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b , si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

SOLUCIÓN

Idea clave

Antes de sustituir números, conviene simplificar la expresión usando solo propiedades del producto y de la inversa de matrices: $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$. Casi siempre es más rápido que invertir matrices concretas.

2.1.1 (1.25 puntos)

Simplificamos ambos miembros por separado.

Miembro izquierdo: $(A^{-1}X)^{-1} = X^{-1}(A^{-1})^{-1} = X^{-1}A$.

Miembro derecho: $A(B^2A)^{-1} = A \cdot A^{-1}(B^2)^{-1} = (B^2)^{-1}$.

La ecuación queda $X^{-1}A = (B^2)^{-1}$, de donde $X^{-1} = (B^2)^{-1}A^{-1} = (AB^2)^{-1}$, y por tanto:

$$X = AB^2.$$

Calculamos B^2 :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Idea clave

¡ B es una matriz involutiva ($B^2 = I$)! Esto simplifica muchísimo los apartados 2.1.1 y 2.1.3, así que conviene calcular B^2 cuanto antes.

Por tanto, $X = AI = A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2.1.2 (0.5 puntos)

Usamos $\det(cM) = c^2 \det(M)$ para matrices 2×2 , y $\det(M^2) = \det(M)^2$:

$$\det(A) = (-2)(-2) - 1 \cdot 3 = 1, \quad \det(B) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = -1.$$

$$\det(3A^5B) = 3^2 \det(A)^5 \det(B) = 9 \cdot 1^5 \cdot (-1) = -9.$$

$$\det[(3A^5B)^2] = [\det(3A^5B)]^2 = (-9)^2 = 81.$$

2.1.3 (0.75 puntos)

Como $B^2 = I$, las potencias de B se simplifican: $B^{100} = (B^2)^{50} = I$, y $B^{99} = B^{98} \cdot B = (B^2)^{49}B = B$. La ecuación se convierte en:

$$aI + bB = A + C.$$

Calculamos $A + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. Así que necesitamos $aI + bB = I$, es decir, $(a - 1)I + bB = 0$:

$$\begin{pmatrix} a - 1 + b & 2b \\ 0 & a - 1 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la posición $(1, 2)$: $2b = 0 \Rightarrow b = 0$. Sustituyendo en $(1, 1)$: $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$. Se comprueba en $(2, 2)$: $1 - 1 - 0 = 0$ ✓.

La solución es $a = 1, b = 0$.

Opción 2.2

ENUNCIADO

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}.$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a .

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

SOLUCIÓN

2.2.1 (1.25 puntos)

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Desarrollando el determinante por la tercera fila:

$$|M| = a \begin{vmatrix} -a & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = a(-a - 1) - (1 + a) = -a^2 - a - 1 - a = -(a^2 + 2a + 1) = -(a + 1)^2.$$

Si $a \neq -1$: $|M| \neq 0$, $rg(M) = rg(M') = 3 = n$. **SCD**: solución única.

Si $a = -1$: $|M| = 0$. Sustituyendo, la primera y la segunda ecuación resultan proporcionales (una es exactamente -1 veces la otra, incluido el término independiente), y la tercera es independiente de ellas. Se comprueba que $rg(M) = rg(M') = 2 < 3$: **SCI**, infinitas soluciones.

Idea clave

Que $|M| = -(a + 1)^2$ sea un cuadrado perfecto (nunca negativo) ya nos avisa de que solo hay un valor especial de a que anula el determinante, y que además lo hace con "multiplicidad doble" — una pista de que conviene comprobar con cuidado si el caso especial es SCI o SI.

2.2.2 (1.25 puntos)

Para $a \neq -1$, resolvemos por reducción. Sumando la primera y la segunda ecuación:

$$(x + ax) + (-ay - y) + (-z + z) = -a + a \implies (1 + a)(x - y) = 0.$$

Como $a \neq -1$, se concluye $x = y$. Sustituyendo en la tercera ecuación ($ax + y = a$, con $y = x$):

$$ax + x = a \implies x(a + 1) = a \implies x = \frac{a}{a + 1}.$$

Por tanto $y = x = \frac{a}{a + 1}$. Sustituyendo en la primera ecuación para hallar z :

$$z = x - ay + a = x(1 - a) + a = \frac{a(1 - a)}{a + 1} + a = \frac{a(1 - a) + a(a + 1)}{a + 1} = \frac{2a}{a + 1}.$$

La solución (única, para cada $a \neq -1$) es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a}{a + 1}, \frac{a}{a + 1}, \frac{2a}{a + 1} \right).$$

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

Opción 3.1

ENUNCIADO

Dados los planos $\pi_1 : x + 2y + mz = -1$, donde m es un parámetro real, y $\pi_2 : x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m , si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45 grados.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2 .

SOLUCIÓN

Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (1, 2, m)$ y $\vec{n}_2 = (1, 0, 1)$.

3.1.1 (0.5 puntos)

Dos planos son perpendiculares cuando sus normales lo son, es decir, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + m \cdot 1 = 1 + m = 0 \implies m = -1.$$

3.1.2 (1.25 puntos)

El ángulo entre dos planos se calcula con el coseno del ángulo entre sus normales:

$$\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|1 + m|}{\sqrt{5 + m^2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Multiplicando ambos lados por $\sqrt{2}$:

$$\frac{|1+m|}{\sqrt{5+m^2}} = 1 \implies |1+m| = \sqrt{5+m^2}.$$

Elevando al cuadrado (operación reversible aquí, ya que ambos lados son no negativos):

$$(1+m)^2 = 5+m^2 \implies 1+2m+m^2 = 5+m^2 \implies 2m = 4 \implies m = 2.$$

Idea clave

Comprobación: con $m = 2$, $\vec{n}_1 = (1, 2, 2)$, $|\vec{n}_1| = 3$, y $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 + 2 = 3$. Entonces $\cos \alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, que en efecto corresponde a 45° .

3.1.3 (0.75 puntos)

Como los planos no son paralelos (sus normales no son proporcionales, salvo quizá para algún m que aquí no ocurre), se cortan en una recta. Su vector director es:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 2, m) \times (1, 0, 1) = (2, m-1, -2).$$

Para un punto de la recta, tomamos $z = 0$: de π_2 , $x = 6$; sustituyendo en π_1 : $6 + 2y = -1 \implies y = -\frac{7}{2}$ (nótese que, con $z = 0$, el término en m desaparece, así que este punto vale para cualquier m). La recta es:

$$\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -\frac{7}{2} + (m-1)t \\ z = -2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción 3.2

ENUNCIADO

Dado el plano $\pi : 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, -1)$ y $Q = (1, a, 1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a , si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π .

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π .

SOLUCIÓN

3.2.1 (1.25 puntos)

Primero comprobamos que $P \in \pi$: $3(0) + 1 - (-1) = 0 + 1 + 1 = 2$ ✓. Como P ya está en π , la recta PQ estará contenida en π si y solo si su vector director es perpendicular al normal de π (es decir, si $\vec{PQ}$ «yace» en el plano).

$$\vec{PQ} = Q - P = (1, a-1, 2), \quad \vec{n}_\pi = (3, 1, -1).$$

Imponemos $\vec{PQ} \cdot \vec{n}_\pi = 0$:

$$3(1) + 1(a - 1) + (-1)(2) = 3 + a - 1 - 2 = a = 0.$$

El único valor es $a = 0$ (se comprueba que entonces $Q = (1, 0, 1)$ también verifica π : $3 + 0 - 1 = 2 \notin$).

3.2.2 (1.25 puntos)

Para $a = 1$, $Q = (1, 1, 1)$. Usamos la fórmula del punto simétrico respecto a un plano:

$$Q' = Q - 2 \frac{\vec{n}_\pi \cdot Q - 2}{|\vec{n}_\pi|^2} \vec{n}_\pi.$$

Calculamos $\vec{n}_\pi \cdot Q = 3(1) + 1(1) - 1(1) = 3$, luego $\vec{n}_\pi \cdot Q - 2 = 1$, y $|\vec{n}_\pi|^2 = 9 + 1 + 1 = 11$:

$$Q' = (1, 1, 1) - \frac{2}{11}(3, 1, -1) = \left(1 - \frac{6}{11}, 1 - \frac{2}{11}, 1 + \frac{2}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right).$$

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

Opción 4.1

ENUNCIADO

Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f .

SOLUCIÓN

4.1.1 (0.5 puntos)

El denominador $x^2 + 1$ nunca se anula, así que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales. En el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0,$$

así que $y = 0$ es asíntota horizontal en ambas direcciones.

Derivamos:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

El denominador es siempre positivo, así que el signo de f' coincide con el de $1 - x^2$: positivo entre -1 y 1 , negativo fuera.

- Decreciente en $(-\infty, -1)$.

- Creciente en $(-1, 1)$.
- Decreciente en $(1, +\infty)$.

4.1.2 (1.5 puntos)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. En $x = -1$ la derivada pasa de negativa a positiva: **mínimo relativo**. En $x = 1$ pasa de positiva a negativa: **máximo relativo**.

$$f(-1) = -\frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2}.$$

Idea clave

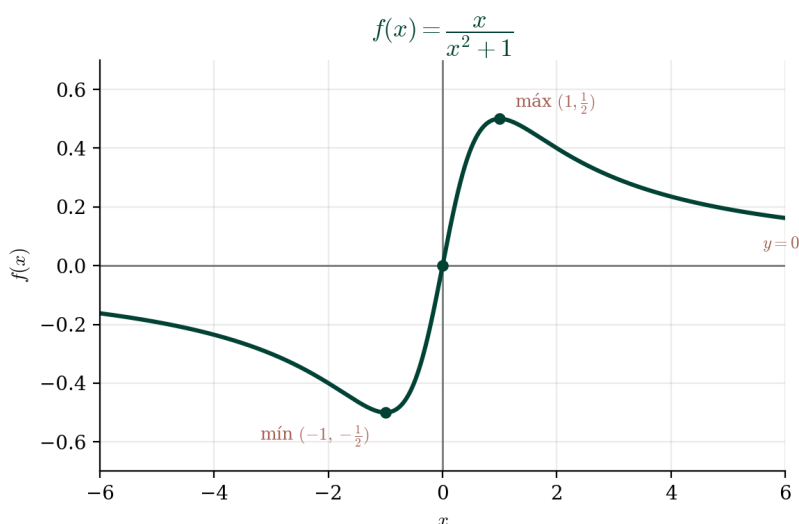
Como $f \rightarrow 0$ en ambos extremos y estos son los únicos puntos críticos, ningún otro punto de la gráfica puede superar estos valores: son también los extremos **absolutos**.

Mínimo absoluto en $(-1, -\frac{1}{2})$, máximo absoluto en $(1, \frac{1}{2})$.

4.1.3 (0.5 puntos)

Idea clave

$f(-x) = \frac{-x}{x^2 + 1} = -f(x)$: la función es **impar** (simétrica respecto al origen). Esto explica por qué el mínimo y el máximo son «espejo» uno del otro.

**Opción 4.2****ENUNCIADO**

Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de las dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

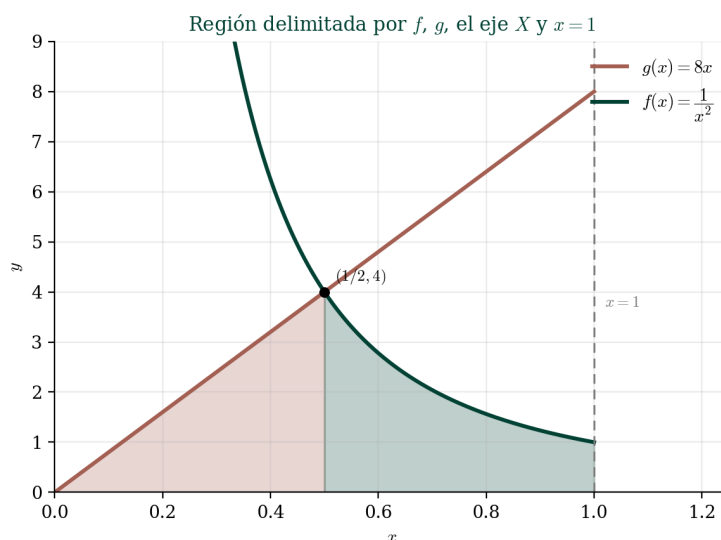
SOLUCIÓN

4.2.1 (0.5 puntos)

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ no está definida en $x = 0$, así que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, hay asíntota vertical en $x = 0$. Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, hay asíntota horizontal $y = 0$.

Derivamos: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$. Para $x > 0$: $f'(x) < 0$ (decreciente). Para $x < 0$: $f'(x) > 0$ (creciente).

4.2.2 (0.25 puntos)



4.2.3 (1.75 puntos)

Buscamos primero el punto de corte de f y g para $x > 0$:

$$\frac{1}{x^2} = 8x \implies 1 = 8x^3 \implies x^3 = \frac{1}{8} \implies x = \frac{1}{2}.$$

En ese punto, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

Idea clave

Para $0 < x < \frac{1}{2}$, la recta $g(x) = 8x$ queda por debajo de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (compruébalo con $x = 0.25$: $g = 2$, $f = 16$); para $\frac{1}{2} < x < 1$ ocurre lo contrario. El recinto pedido —delimitado por el eje X , $x = 1$ y ambas curvas— tiene como «techo» la curva *inferior* en cada tramo: primero g (de 0 a $\frac{1}{2}$) y después f (de $\frac{1}{2}$ a 1).

$$\text{Área} = \int_0^{1/2} 8x \, dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} \, dx.$$

Calculamos cada integral:

$$\int_0^{1/2} 8x \, dx = \left[4x^2 \right]_0^{1/2} = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{1/2}^1 = (-1) - (-2) = 1.$$

Por tanto:

$$\text{Área} = 1 + 1 = 2 \, \text{u}^2.$$