

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2021

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Formato de este examen: elige 3 problemas de los 6 propuestos. Cada problema puntúa hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio es la suma de las calificaciones de los 3 problemas elegidos, dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Idea clave

Este examen (2021) usa el formato de 6 problemas, elige 3. Aquí resolvemos los 6, como recurso de repaso completo.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PROBLEMA 1: Sistema con parámetro (10 puntos)**ENUNCIADO**

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + (a + 1)z = 2 \\ x + (a - 1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$$

- a) Estudiarlo en función de los valores del parámetro real a . (5 puntos)
- b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$. Desarrollamos el determinante por la primera

fila:

$$|M| = 1 \begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (a+1) \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 2 & a \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a-1 & 2 \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a-1) - 2a = -a-1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3, \quad \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 2(a-1) = 2 - a.$$

Sustituyendo:

$$|M| = (-a - 1) - (-3) + (a + 1)(2 - a) = -a - 1 + 3 + 2a - a^2 + 2 - a = -a^2 + 4.$$

Factorizamos: $|M| = 4 - a^2 = -(a - 2)(a + 2)$.

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$: $|M| \neq 0$, $rg(M) = rg(M') = 3 = n$. SCD.

Si $a = -2$: sustituyendo, se comprueba que $rg(M) = 2$ mientras que $rg(M') = 3$. SI: incompatible.

Si $a = 2$: sustituyendo, $rg(M) = rg(M') = 2 < 3$. SCI: infinitas soluciones.

b) El sistema es compatible cuando $a \neq -2$ (con solución única si además $a \neq 2$, e infinitas si $a = 2$).

Caso general ($a \neq \pm 2$). Resolviendo el sistema (por reducción o sustitución) se obtiene:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-2a - 3}{a + 2}, \frac{3}{a + 2}, \frac{4}{a + 2} \right), \quad a \neq \pm 2.$$

Caso $a = 2$. El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera: $z = 1$. Sustituyendo en la segunda: $x + y + 2 = 1 \Rightarrow x + y = -1 \Rightarrow x = -y - 1$.

Idea clave

Comprobamos con la tercera ecuación, que no hemos usado para despejar: $2(-y - 1) + 2y + 1 = -2y - 2 + 2y + 1 = -1$ ✓, se cumple para cualquier y : confirma que y es el parámetro libre.

$$(x, y, z) = (-y - 1, y, 1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 2: Tres planos con parámetro (10 puntos)

ENUNCIADO

Se dan los planos $\pi_1 : x + y + z = a - 1$, $\pi_2 : 2x + y + az = a$ y $\pi_3 : x + ay + z = 1$.

- Determinar la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a . (4 puntos)
- Para $a = 1$, calcular, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 . (3 puntos)
- Para $a = 2$, calcular, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 . (3 puntos)

SOLUCIÓN

Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (2, 1, a)$ y $\vec{n}_3 = (1, a, 1)$.

a) Consideramos el sistema formado por los tres planos, con matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$. Su determinante es:

$$|M| = -(a - 1)(a - 2)$$

(desarrollo análogo al de problemas anteriores, omitido por brevedad). Se anula en $a = 1$ y $a = 2$.

Idea clave

Antes de mirar rangos, es útil comprobar si algún par de normales es proporcional (planos paralelos): $\vec{n}_1 \times \vec{n}_3 = (1 - a, 0, a - 1)$, que se anula **únicamente** en $a = 1$. Ningún otro par de normales resulta proporcional para ningún valor de a .

Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$: $|M| \neq 0$, sistema compatible determinado: los tres planos se cortan en un **único punto** (posición genérica, ningún par es paralelo).

Si $a = 1$: se comprueba $rg(M) = 2, rg(M') = 3$: sistema incompatible. Además, en este caso $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_3$ (según la comprobación anterior): π_1 y π_3 son **paralelos y distintos** (se verifica que sus términos independientes no coinciden), mientras que π_2 corta a ambos. Los tres planos forman un **prisma triangular** (se cortan dos a dos en tres rectas paralelas, sin punto común a los tres).

Si $a = 2$: se comprueba $rg(M) = rg(M') = 2 < 3$: sistema compatible indeterminado. Como ningún par de normales es proporcional en $a = 2$ (según la comprobación inicial), no hay planos paralelos entre sí; la única forma de que el sistema sea compatible indeterminado sin planos paralelos es que **los tres compartan una misma recta**.

b) Para $a = 1$: $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ y $\vec{n}_3 = (1, 1, 1)$ son **iguales**. Comprobamos los términos independientes: $\pi_1 : x + y + z = 0$ y $\pi_3 : x + y + z = 1$. Son planos paralelos con distinto término independiente: **no existe recta de corte**, ya que no tienen ningún punto en común.

c) Para $a = 2$: $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (2, 1, 2)$. Como no son proporcionales, los planos se cortan en una recta, cuya dirección es:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 1, 1) \times (2, 1, 2) = (1, 0, -1).$$

Para hallar un punto de la recta, resolvemos el sistema formado por $\pi_1 : x + y + z = 1$ y $\pi_2 : 2x + y + 2z = 2$ imponiendo, por ejemplo, $z = 0$: $x + y = 1$ y $2x + y = 2$. Restando, $x = 1$, y entonces $y = 0$. El punto es $(1, 0, 0)$.

$$\text{Recta de corte: } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}.$$

PROBLEMA 3: Función racional: dominio, monotonía e integral (10 puntos)**ENUNCIADO**

Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtener:

- El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)
- La integral $\int f(x) dx$. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) El denominador se anula en $x = 0$ y $x = -2$, así que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$. Estos dos puntos dan lugar a **asíntotas verticales** (el numerador no se anula en ninguno de ellos: $f(0)$ tendría numerador $-1 \neq 0$, y $f(-2)$ tendría numerador $-3 \neq 0$).

Como el grado del denominador es mayor que el del numerador, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$: hay **asíntota horizontal** $y = 0$.

b) Escribimos $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$ y derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 2x) - (x-1)(2x+2)}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{x^2 + 2x - (2x^2 + 2x - 2x - 2)}{(x^2 + 2x)^2}.$$

Simplificamos el numerador: $x^2 + 2x - 2x^2 - 2x + 2x + 2 = -x^2 + 2x + 2$. Por tanto:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2(x+2)^2}.$$

El denominador es siempre positivo (es un cuadrado), así que el signo de f' depende del numerador. Igualamos a cero: $-x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$, con soluciones

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Idea clave

El numerador $-x^2 + 2x + 2$ es una parábola invertida (coeficiente negativo en x^2): positiva *entre* sus raíces, negativa fuera de ellas.

f es **creciente** en $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ (salvo en los puntos $x = 0, -2$ que no pertenecen al dominio, aunque $-2 < 1 - \sqrt{3} \approx -0.73$, así que solo hay que excluir $x = 0$ dentro de este intervalo) y **decreciente** en el resto del dominio, es decir, en $(-\infty, -2)$, $(-2, 1 - \sqrt{3})$ y $(1 + \sqrt{3}, +\infty)$.

c) Descomponemos $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$ en fracciones simples: $\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$.

Idea clave

Multiplicando por x y evaluando en $x = 0$: $A = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$. Multiplicando por $(x+2)$ y evaluando en $x = -2$: $B = \frac{-2-1}{-2} = \frac{3}{2}$.

$$f(x) = -\frac{1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2}.$$

Integrando:

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{3}{2} \ln|x+2| + C.$$

PROBLEMA 4: Matriz con parámetro: rango, invertibilidad e inversa (10 puntos)

ENUNCIADO

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 + 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Obtener el rango de la matriz en función del parámetro m . (4 puntos)
- Explicar cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
- Resolver la ecuación $XA = I$, donde I es la matriz identidad, en el caso $m = 1$. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Calculamos $|A|$ desarrollando por la segunda fila, que solo tiene un elemento no nulo:

$$|A| = m \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & m \\ 2 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = m[-(m^2 + 1) - 2m] = m(-m^2 - 2m - 1) = -m(m + 1)^2.$$

Se anula en $m = 0$ y $m = -1$ (raíz doble).

Si $m \neq 0$ y $m \neq -1$: $|A| \neq 0$, $rg(A) = 3$.

Si $m = 0$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El menor de filas 1,3 y columnas 1,3 es $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, así que $rg(A) = 2$.

Si $m = -1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. El menor de filas 1,2 y columnas 1,2 es $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, así que $rg(A) = 2$.

b) A es invertible exactamente cuando $rg(A) = 3$, es decir, cuando $|A| \neq 0$: para todo m excepto $m = 0$ y $m = -1$.

c) Para $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, con $|A| = -1(1 + 1)^2 = -4 \neq 0$.

Idea clave

De $XA = I$ se obtiene directamente $X = A^{-1}$ (multiplicando ambos lados por A^{-1} a la derecha). Calculamos la inversa con la matriz adjunta.

Calculamos los 9 cofactores de A :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

La matriz de cofactores es $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y su traspuesta:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dividiendo entre $|A| = -4$:

$$X = A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 5: Punto, plano, simétrico y plano paralelo (10 puntos)

ENUNCIADO

Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

- Calcular la distancia del punto P al plano π . (2 puntos)
- Calcular el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π . (5 puntos)
- Calcular la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π . (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) Con $\vec{n}_\pi = (3, 2, 1)$:

$$d(P, \pi) = \frac{|3(1) + 2(2) + 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|3 + 4 + 3 + 4|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14} \approx 3.7417.$$

Idea clave

Es una buena señal que el numerador (14) sea múltiplo del propio $\sqrt{14}$ tras simplificar: $\frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$. Este tipo de simplificaciones limpias suele confirmar que no hay errores de cálculo.

b) Usamos la fórmula directa del punto simétrico:

$$P' = P - 2 \frac{\vec{n}_\pi \cdot P + 4}{|\vec{n}_\pi|^2} \vec{n}_\pi.$$

Ya calculamos $\vec{n}_\pi \cdot P + 4 = 14$ (numerador del apartado a, antes del valor absoluto) y $|\vec{n}_\pi|^2 = 14$:

$$P' = (1, 2, 3) - 2 \cdot \frac{14}{14} \cdot (3, 2, 1) = (1, 2, 3) - 2(3, 2, 1) = (1 - 6, 2 - 4, 3 - 2) = (-5, -2, 1).$$

c) El plano π' es paralelo a π (mismo vector normal $(3, 2, 1)$) y pasa por $P' = (-5, -2, 1)$:

$$3(x + 5) + 2(y + 2) + 1(z - 1) = 0 \implies 3x + 15 + 2y + 4 + z - 1 = 0 \implies 3x + 2y + z + 18 = 0.$$

PROBLEMA 6: Espejo roto: pieza rectangular de área máxima (10 puntos)

ENUNCIADO

Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R , uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura del enunciado).

- a) Hallar el área de la pieza rectangular obtenida como función de x , cuando $0 \leq x \leq 32$. (4 puntos)
- b) Calcular las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)
- c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

SOLUCIÓN

Situamos el origen en la esquina rota (donde estaban los dos catetos). El cateto horizontal mide 32 (sobre el eje X) y el vertical 40 (sobre el eje Y); la línea de rotura (hipotenusa) une los puntos $(32, 0)$ y $(0, 40)$. Su ecuación, en forma de segmentos, es:

$$\frac{x}{32} + \frac{y}{40} = 1 \implies y = 40 - \frac{40}{32}x = 40 - \frac{5}{4}x.$$

Idea clave

La pieza R tiene un vértice en (x, y) , sobre la línea de rotura, y el vértice opuesto en la esquina intacta del espejo, $(80, 80)$: es el rectángulo más grande posible con un vértice en la rotura, ya que cualquier punto con abscisa $\geq x$ y ordenada $\geq y$ queda automáticamente fuera del triángulo desprendido (la parte perdida del espejo).

- a) El rectángulo R tiene anchura $80 - x$ y altura $80 - y = 80 - \left(40 - \frac{5}{4}x\right) = 40 + \frac{5}{4}x$. Su área es:

$$A(x) = (80 - x) \left(40 + \frac{5}{4}x\right), \quad 0 \leq x \leq 32.$$

Desarrollando:

$$A(x) = 80 \cdot 40 + 80 \cdot \frac{5}{4}x - 40x - \frac{5}{4}x^2 = 3200 + 100x - 40x - \frac{5}{4}x^2 = 3200 + 60x - \frac{5}{4}x^2.$$

- b) Derivamos:

$$A'(x) = 60 - \frac{5}{2}x.$$

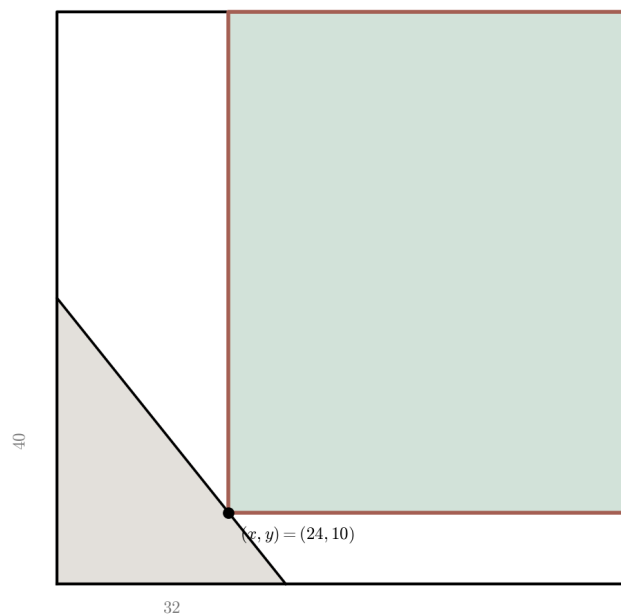
Igualamos a cero: $60 = \frac{5}{2}x \implies x = 24$. Comprobamos que es un máximo: $A''(x) = -\frac{5}{2} < 0$ (constante negativa), luego cualquier punto crítico es un máximo; y $x = 24$ está dentro del intervalo permitido $[0, 32]$.

Calculamos la ordenada correspondiente: $y = 40 - \frac{5}{4}(24) = 40 - 30 = 10$.

Las dimensiones de R son:

$$\text{anchura} = 80 - 24 = 56 \text{ cm}, \quad \text{altura} = 80 - 10 = 70 \text{ cm}.$$

Pieza rectangular R de área máxima



c) El área máxima es:

$$A_{\text{máx}} = 56 \times 70 = 3920 \text{ cm}^2.$$