

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Andalucía -- Ordinaria 2023

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad y Pruebas de Admisión – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Curso 2022–2023.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.
- c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

- a) [1,5 puntos] Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
- b) [1 punto] Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x))$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Derivamos usando la regla del cociente (o, equivalentemente, la regla de la cadena sobre $(e^x + e^{-x})^{-1}$):

$$f'(x) = -\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

Idea clave

Como el denominador $(e^x + e^{-x})^2$ es siempre positivo, el signo de $f'(x)$ es el opuesto del signo de $e^x - e^{-x}$.

Igualamos a cero: $e^x - e^{-x} = 0 \implies e^x = e^{-x} \implies e^{2x} = 1 \implies x = 0$.

Estudiamos el signo: si $x < 0$, entonces $e^x < e^{-x}$, luego $e^x - e^{-x} < 0$ y $f'(x) > 0$ (**creciente**); si $x > 0$, entonces $e^x > e^{-x}$, luego $f'(x) < 0$ (**decreciente**).

Por tanto, f tiene un máximo en $x = 0$, con valor:

$$f(0) = \frac{1}{e^0 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

Idea clave

Como $e^x + e^{-x} \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, se tiene $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Pero $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}} > 0$ para todo x real: el valor 0 es una cota inferior que la función se aproxima sin alcanzar nunca.

f tiene máximo absoluto en $x = 0$, con valor $f(0) = \frac{1}{2}$. No existe mínimo absoluto: f se aproxima a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$, pero nunca llega a valer 0.

Apartado b)

Llamamos $N(x) = x^2$ y $D(x) = e^x + e^{-x}$. Cuando $x \rightarrow +\infty$, ambos tienden a $+\infty$: indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hôpital:

$$N'(x) = 2x, \quad D'(x) = e^x - e^{-x}.$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$, $N'(x) \rightarrow +\infty$ y $D'(x) \rightarrow +\infty$: sigue siendo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hôpital una segunda vez:

$$N''(x) = 2, \quad D''(x) = e^x + e^{-x}.$$

Como $D''(x) \rightarrow +\infty$ mientras $N''(x) = 2$ es constante:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{N''(x)}{D''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 0.$$

El límite pedido es 0.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Sea la función $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) [1,5 puntos] Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Calculamos $f(-2)$ y $f(2)$:

$$f(2) = 8 - 4 + 5 = 9, \quad f(-2) = -8 + 4 + 5 = 1.$$

La pendiente de la recta secante es:

$$m = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{9 - 1}{4} = 2.$$

Derivamos f e igualamos a esta pendiente:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 2 \implies 3x^2 = 4 \implies x^2 = \frac{4}{3} \implies x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Como $\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,155$, ambos valores están dentro del dominio $[-2, 2]$.

Las abscisas pedidas son $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Apartado b)

Calculamos la segunda derivada para hallar el punto de inflexión:

$$f''(x) = 6x.$$

Igualemos a cero: $6x = 0 \implies x = 0$, y como f'' cambia de signo en $x = 0$ (negativa para $x < 0$, positiva para $x > 0$), es efectivamente un punto de inflexión.

Calculamos $f(0) = 5$ y $f'(0) = 3(0)^2 - 2 = -2$.

Idea clave

La recta tangente usa la pendiente $f'(0)$ directamente; la recta normal es perpendicular a la tangente, así que su pendiente es la opuesta e inversa: $-\frac{1}{f'(0)}$.

Recta tangente (pasa por $(0, 5)$ con pendiente -2):

$$y - 5 = -2(x - 0) \implies y = -2x + 5.$$

Recta normal (pasa por $(0, 5)$ con pendiente $-\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$):

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 0) \implies y = \frac{x}{2} + 5.$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x|x - 1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

SOLUCIÓN

Idea clave

Como f está definida con un valor absoluto, hay que trabajar por tramos: para $x < 1$, $|x - 1| = 1 - x$, así que $f(x) = x(1 - x) = x - x^2$; para $x \geq 1$, $|x - 1| = x - 1$, así que $f(x) = x(x - 1) = x^2 - x$. El punto $x = 0$ cae en el primer tramo.

En el tramo $x < 1$: $f(x) = x - x^2$, con $f'(x) = 1 - 2x$.

En $x = 0$: $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. La recta tangente es:

$$y - 0 = 1(x - 0) \implies y = x.$$

Buscamos los puntos de intersección entre $f(x) = x|x - 1|$ y la tangente $y = x$:

$$x|x - 1| = x \implies x(|x - 1| - 1) = 0 \implies x = 0 \text{ o } |x - 1| = 1.$$

De $|x - 1| = 1$: $x - 1 = 1$ o $x - 1 = -1$, es decir, $x = 2$ o $x = 0$.

Los puntos de corte son $x = 0$ y $x = 2$.

Estudiamos el signo de (tangente) $- f(x)$ en $(0, 2)$, separando en los dos tramos de f :

En $(0, 1)$: $x - f(x) = x - (x - x^2) = x^2 \geq 0$ (tangente por encima).

En $(1, 2)$: $x - f(x) = x - (x^2 - x) = 2x - x^2 = x(2 - x)$, que es positivo para $1 < x < 2$ (tangente por encima).

Idea clave

Como la tangente queda por encima de la curva en todo el intervalo $(0, 2)$, el área se calcula integrando directamente (tangente) $- f(x)$ en cada tramo, sin necesidad de valores absolutos adicionales.

$$\text{Área} = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx.$$

Calculamos cada integral:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\int_1^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Sumamos:

$$\text{Área} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

El área del recinto es 1 u^2 .

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\sin(x^2)}$.

SOLUCIÓN

Idea clave

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $F'(x) = \sin(x^2)$ y $F(0) = 0$ (integral con límites iguales). Con esto, tanto el numerador $x F(x)$ como el denominador $\sin(x^2)$ se anulan en $x = 0$: indeterminación $\frac{0}{0}$.

Llamamos $N(x) = x F(x)$ y $D(x) = \sin(x^2)$. Comprobamos: $N(0) = 0 \cdot F(0) = 0$; $D(0) = \sin(0) = 0$. Aplicamos L'Hôpital, derivando el producto $x F(x)$ con la regla del producto:

$$N'(x) = F(x) + x F'(x) = F(x) + x \sin(x^2), \quad D'(x) = 2x \cos(x^2).$$

Evalúamos en $x = 0$: $N'(0) = F(0) + 0 = 0$; $D'(0) = 0$. Persiste $\frac{0}{0}$: aplicamos L'Hôpital una segunda vez.

Idea clave

Al derivar $N'(x) = F(x) + x \sin(x^2)$ de nuevo, volvemos a usar $F'(x) = \sin(x^2)$ y la regla del producto sobre $x \sin(x^2)$.

$$N''(x) = F'(x) + \sin(x^2) + x \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = \sin(x^2) + \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2) = 2 \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2).$$

$$D''(x) = 2 \cos(x^2) + 2x \cdot (-\sin(x^2)) \cdot 2x = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2).$$

Evalúamos en $x = 0$:

$$N''(0) = 2 \sin(0) + 0 = 0, \quad D''(0) = 2 \cos(0) - 0 = 2.$$

Como $D''(0) = 2 \neq 0$, ya podemos calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{\sin(x^2)} = \frac{N''(0)}{D''(0)} = \frac{0}{2} = 0.$$

El límite pedido es 0.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60 % de los coches blancos más el 50 % de los coches negros representan el 30 % de los coches vendidos. El 20 % de los coches blancos junto con el 60 % de los coches negros y el 60 % de los coches rojos representan la

mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

SOLUCIÓN

Llamamos W , N , R al número de coches blancos, negros y rojos, respectivamente.

Idea clave

Cada porcentaje del enunciado se traduce en una ecuación lineal: los porcentajes de W , N , R que se mencionan igualan a un porcentaje del total $W + N + R$.

$$0,6W + 0,5N = 0,3(W + N + R), \quad 0,2W + 0,6N + 0,6R = 0,5(W + N + R), \quad N = W + 100.$$

Simplificamos la primera ecuación:

$$0,6W + 0,5N = 0,3W + 0,3N + 0,3R \implies 0,3W + 0,2N - 0,3R = 0. \quad (1)$$

Simplificamos la segunda:

$$0,2W + 0,6N + 0,6R = 0,5W + 0,5N + 0,5R \implies -0,3W + 0,1N + 0,1R = 0. \quad (2)$$

Sustituimos $N = W + 100$ en (1) y (2).

$$\text{En (1): } 0,3W + 0,2(W + 100) - 0,3R = 0 \implies 0,5W + 20 - 0,3R = 0 \implies 0,3R = 0,5W + 20. \quad (1')$$

$$\text{En (2): } -0,3W + 0,1(W + 100) + 0,1R = 0 \implies -0,2W + 10 + 0,1R = 0 \implies 0,1R = 0,2W - 10. \quad (2')$$

De (2'): $R = 2W - 100$. Sustituyendo en (1'):

$$0,3(2W - 100) = 0,5W + 20 \implies 0,6W - 30 = 0,5W + 20 \implies 0,1W = 50 \implies W = 500.$$

Entonces:

$$N = 500 + 100 = 600, \quad R = 2(500) - 100 = 900.$$

Comprobación: $0,6(500) + 0,5(600) = 300 + 300 = 600 = 0,3(2000) \checkmark$; $0,2(500) + 0,6(600) + 0,6(900) = 100 + 360 + 540 = 1000 = 0,5(2000) \checkmark$.

Se vendieron 500 coches blancos, 600 negros y 900 rojos.

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) [0,5 puntos] Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A .

b) [2 puntos] Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $AX + X = B$.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera fila:

$$|A| = 0 \cdot (...) - 0 \cdot (...) + m \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} = m \cdot m^2 = m^3.$$

A tiene inversa si y solo si $m \neq 0$.

Apartado b)

Reescribimos la ecuación:

$$AX + X = B \implies (A + I)X = B.$$

Llamamos $M = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos $|M|$ desarrollando por la primera fila:

$$|M| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} - 0 + m \begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = 1(1 - 0) + m(m^2 - 0) = 1 + m^3.$$

Idea clave

El enunciado excluye $m = -1$ precisamente porque es el único valor real que anula $1 + m^3$ (ya que $1 + m^3 = (m + 1)(m^2 - m + 1)$, y el segundo factor no tiene raíces reales, pues su discriminante es $1 - 4 = -3 < 0$). Para $m \neq -1$, M es siempre invertible.

Como $|M| = 1 + m^3 \neq 0$ para $m \neq -1$, existe M^{-1} , y podemos despejar:

$$X = M^{-1}B.$$

Calculamos M^{-1} mediante la matriz adjunta. Los 9 cofactores de M :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1, & C_{12} &= -\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -m, & C_{13} &= \begin{vmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = m^2, \\ C_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = m^2, & C_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & C_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} = -m, \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -m, & C_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} = m^2, & C_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

La matriz de cofactores es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m^2 & 1 & -m \\ -m & m^2 & 1 \end{pmatrix},$$

y su traspuesta (la adjunta):

$$\text{adj}(M) = C^t = \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$M^{-1} = \frac{1}{1+m^3} \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Multiplicar por B a la derecha equivale a reordenar las columnas de M^{-1} : como B intercambia las columnas 2.^a y 3.^a de cualquier matriz que la multiplique por la derecha, $X = M^{-1}B$ se obtiene simplemente intercambiando la 2.^a y la 3.^a columna de M^{-1} .

$$X = M^{-1}B = \frac{1}{1+m^3} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

La solución (para todo $m \neq -1$) es $X = \frac{1}{1+m^3} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}.$

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A , B y C . Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A , B y C .

SOLUCIÓN

Idea clave

El plano perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio es el plano mediador del segmento: tiene como vector normal la dirección del segmento, y pasa por el punto medio.

Calculamos el punto medio de PQ :

$$M = \frac{P+Q}{2} = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{8+6}{2} \right) = (1, 2, 7).$$

El vector normal del plano es la dirección del segmento:

$$\vec{n} = Q - P = (2, -2, -2).$$

La ecuación del plano, usando el punto M :

$$2(x-1) - 2(y-2) - 2(z-7) = 0 \implies 2x - 2y - 2z + 16 = 0.$$

Dividiendo entre 2: $x - y - z + 8 = 0$.

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Eje X ($y = z = 0$): $x + 8 = 0 \implies x = -8$. $A = (-8, 0, 0)$.

Eje Y ($x = z = 0$): $-y + 8 = 0 \implies y = 8$. $B = (0, 8, 0)$.

Eje Z ($x = y = 0$): $-z + 8 = 0 \implies z = 8$. $C = (0, 0, 8)$.

Calculamos el área del triángulo ABC mediante el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} = (8, 8, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (8, 0, 8).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8(8) - 0(0), -[8(8) - 0(8)], 8(0) - 8(8)) = (64, -64, -64).$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{64^2 + 64^2 + 64^2} = 64\sqrt{3}.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 64\sqrt{3} = 32\sqrt{3}.$$

El área del triángulo ABC es $32\sqrt{3} \text{ u}^2 \approx 55,43 \text{ u}^2$.

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera el punto $A(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2, 1, 1)$ y $C(0, 1, -1)$.

- a) [1,5 puntos] Halla la distancia del punto A a la recta r .
- b) [1 punto] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Un vector director de r es:

$$\vec{d} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-2, 0, -2).$$

Calculamos $\overrightarrow{BA} = A - B = (-3, 0, 2)$.

Idea clave

La distancia de un punto a una recta se calcula con la fórmula $d(A, r) = \frac{\|\overrightarrow{BA} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$: el numerador es el área del paralelogramo, y al dividir entre la base ($\|\vec{d}\|$) obtenemos la altura, que es justo la distancia buscada.

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{BA} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0(-2) - 2(0), -[(-3)(-2) - 2(-2)], (-3)(0) - 0(-2)) = (0, -10, 0).$$

$$\|\overrightarrow{BA} \times \vec{d}\| = 10, \quad \|\vec{d}\| = \sqrt{4 + 0 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

$$d(A, r) = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

La distancia de A a r es $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$.

Apartado b)

Idea clave

El área de un triángulo es $\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$. Aquí, tomando BC como base y la distancia de A a la recta $r = BC$ (calculada en el apartado anterior) como altura, obtenemos el área directamente sin más cálculos.

La base es:

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \|\vec{d}\| = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cdot d(A, r) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

El área del triángulo ABC es 5 u^2 .