

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Andalucía -- Extraordinaria 2021

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Acceso y Admisión a la Universidad – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Convocatoria Extraordinaria, Curso 2020-2021.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.
- c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Calcula a y b sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)}{x^2} = 7$.

SOLUCIÓN

Llamamos $N(x) = a(1 - \cos(x)) + b \operatorname{sen}(x) - 2(e^x - 1)$ y $D(x) = x^2$.

Sustituyendo $x = 0$: $N(0) = a(0) + b(0) - 2(0) = 0$, $D(0) = 0$: indeterminación $\frac{0}{0}$ para cualesquiera a, b .
Aplicamos L'Hôpital:

$$N'(x) = a \operatorname{sen}(x) + b \cos(x) - 2e^x, \quad D'(x) = 2x.$$

Evaluamos en $x = 0$: $N'(0) = 0 + b - 2 = b - 2$, $D'(0) = 0$.

Idea clave

Como el denominador de las derivadas se anula en $x = 0$, para que el límite sea finito el numerador de las derivadas también debe anularse allí.

Imponemos $N'(0) = 0$: $b - 2 = 0 \implies b = 2$.

Con $b = 2$, comprobamos que persiste $\frac{0}{0}$ ($N'(0) = D'(0) = 0$): aplicamos L'Hôpital una segunda vez:

$$N''(x) = a \cos(x) - b \sin(x) - 2e^x, \quad D''(x) = 2.$$

Evalúamos en $x = 0$ (con $b = 2$): $N''(0) = a - 0 - 2 = a - 2$, $D''(0) = 2 \neq 0$. Ya podemos calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{a - 2}{2}.$$

Igualamos al valor dado:

$$\frac{a - 2}{2} = 7 \implies a - 2 = 14 \implies a = 16.$$

Los valores pedidos son $a = 16$ y $b = 2$.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Halla $a > 0$ y $b > 0$ sabiendo que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{bx^2}{1 + ax^4}$ tiene en el punto $(1, 2)$ un punto crítico.

SOLUCIÓN**Idea clave**

“Punto crítico en $(1, 2)$ ” aporta dos condiciones: el punto debe pertenecer a la gráfica ($f(1) = 2$) y la derivada debe anularse allí ($f'(1) = 0$).

Condición $f(1) = 2$:

$$f(1) = \frac{b}{1 + a} = 2 \implies b = 2(1 + a). \quad (1)$$

Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{2bx(1 + ax^4) - bx^2(4ax^3)}{(1 + ax^4)^2} = \frac{2bx + 2abx^5 - 4abx^5}{(1 + ax^4)^2} = \frac{2bx(1 - ax^4)}{(1 + ax^4)^2}.$$

Condición $f'(1) = 0$:

$$f'(1) = \frac{2b(1 - a)}{(1 + a)^2} = 0.$$

Como $b > 0$ y $(1 + a)^2 \neq 0$ (pues $a > 0$), la única forma de que se anule es:

$$1 - a = 0 \implies a = 1.$$

Sustituyendo en (1):

$$b = 2(1 + 1) = 4.$$

Los valores pedidos son $a = 1$ y $b = 4$.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \int_0^x te^t dt.$$

Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y sus puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

SOLUCIÓN

Idea clave

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $f'(x)$ es directamente el integrando evaluado en x : $f'(x) = xe^x$. Para estudiar la concavidad y los puntos de inflexión necesitamos la segunda derivada, así que derivamos una vez más.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$f'(x) = xe^x.$$

Derivamos de nuevo con la regla del producto:

$$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x).$$

Igualamos a cero: como $e^x > 0$ siempre, $f''(x) = 0 \iff 1 + x = 0 \iff x = -1$.

Idea clave

Como $e^x > 0$ para todo x , el signo de $f''(x)$ coincide exactamente con el signo de $(1 + x)$.

Para $x < -1$: $1 + x < 0$, luego $f''(x) < 0$: f es **cóncava** (hacia abajo) en $(-\infty, -1)$.

Para $x > -1$: $1 + x > 0$, luego $f''(x) > 0$: f es **convexa** (hacia arriba) en $(-1, +\infty)$.

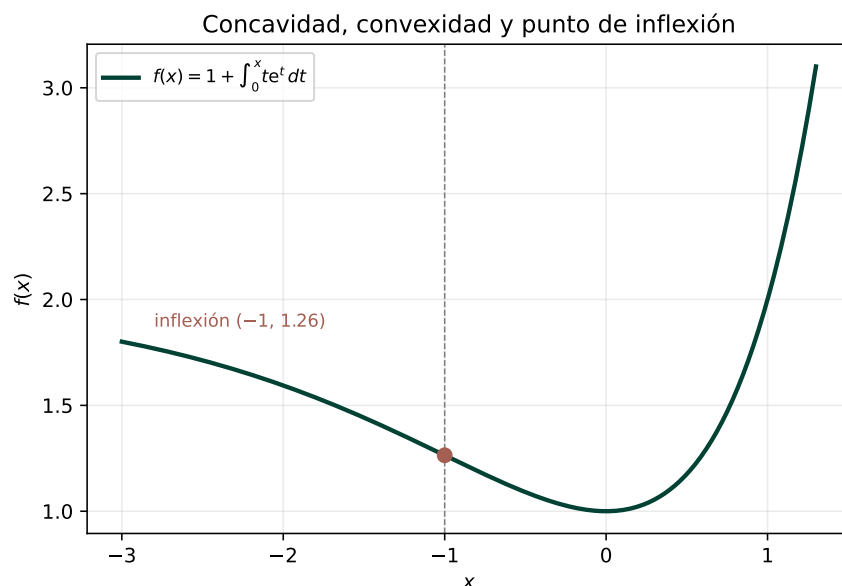
Como f'' cambia de signo en $x = -1$, hay un punto de inflexión allí. Calculamos $f(-1)$ integrando por partes:

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t = e^t(t - 1) + C.$$

$$\int_0^{-1} te^t dt = \left[e^t(t - 1) \right]_0^{-1} = e^{-1}(-2) - e^0(-1) = -\frac{2}{e} + 1.$$

$$f(-1) = 1 + \left(1 - \frac{2}{e}\right) = 2 - \frac{2}{e}.$$

f es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$, con un punto de inflexión en $x = -1$, de valor $f(-1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,264$.



EJERCICIO 4 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ (para $x \neq -1$, $x \neq 1$). Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(2, 4)$.

SOLUCIÓN

Idea clave

Como el numerador y el denominador tienen el mismo grado, dividimos primero para obtener una parte entera y una fracción propia.

Escribimos $x^2 + 1 = (x^2 - 1) + 2$, así que:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{(x - 1)(x + 1)}.$$

Descomponemos la fracción propia en fracciones simples:

$$\frac{2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}.$$

Multiplicando por $(x - 1)(x + 1)$: $2 = A(x + 1) + B(x - 1)$. Evaluando en $x = 1$: $2 = 2A \implies A = 1$. Evaluando en $x = -1$: $2 = -2B \implies B = -1$.

Por tanto:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

Integrando término a término:

$$F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C.$$

Imponemos que la gráfica pase por (2, 4):

$$F(2) = 2 + \ln 1 - \ln 3 + C = 2 + 0 - \ln 3 + C = 2 - \ln 3 + C.$$

Igualamos a 4: $C = 2 + \ln 3$.

La primitiva pedida es $F(x) = x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2 + \ln 3$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$.

b) [1,25 puntos] Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Calculamos A^2 multiplicando A por sí misma:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(Por ejemplo, la entrada (1, 1) es $0(0) + 3(1) + 4(-1) = 3 - 4 = -1$; el resto se calcula de forma análoga.)

Calculamos ahora A^{-1} . Primero, $|A|$ desarrollando por la primera fila:

$$|A| = 0 \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 3(4 - 5) + 4(3 - 4) = 0 + 3 - 4 = -1.$$

Calculamos los 9 cofactores de A :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -3.$$

La matriz de cofactores y su traspuesta (adjunta):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$-A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Comparando con A^2 calculado arriba, vemos que son exactamente iguales.

Queda comprobado que $A^2 = -A^{-1}$.

Apartado b)

Idea clave

En vez de calcular A^4 multiplicando matrices repetidamente, aprovechamos la relación del apartado anterior. Multiplicando $A^2 = -A^{-1}$ por A a la derecha: $A^3 = -A^{-1}A = -I$. Y multiplicando de nuevo por A : $A^4 = A^3A = -IA = -A$. Así, A^4 se reduce simplemente a $-A$, sin más cálculos.

De $A^2 = -A^{-1}$, multiplicamos ambos lados por A :

$$A^3 = -A^{-1}A = -I.$$

Multiplicando de nuevo por A :

$$A^4 = A^3A = -IA = -A.$$

Sustituimos en la ecuación $A^4X + B = AC$:

$$-AX + B = AC \implies -AX = AC - B \implies X = -A^{-1}(AC - B) = A^{-1}(B - AC).$$

Idea clave

Ya conocemos A^{-1} del apartado anterior (o, equivalentemente, podemos usar $A^{-1} = -A^2$, que es la misma relación reescrita). No hace falta volver a calcularlo.

Calculamos primero AC :

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(2) + 3(-3) + 4(1) & 0(0) + 3(2) + 4(-1) \\ 1(2) + (-4)(-3) + (-5)(1) & 1(0) + (-4)(2) + (-5)(-1) \\ -1(2) + 3(-3) + 4(1) & -1(0) + 3(2) + 4(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $B - AC$:

$$B - AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos por A^{-1} :

$$X = A^{-1}(B - AC) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos cada entrada:

$$X_{11} = 1(6) + 0(-6) + (-1)(3) = 3, \quad X_{12} = 1(-3) + 0(3) + (-1)(3) = -6,$$

$$X_{21} = -1(6) + (-4)(-6) + (-4)(3) = -6 + 24 - 12 = 6, \quad X_{22} = -1(-3) + (-4)(3) + (-4)(3) = 3 - 12 - 12 = -21,$$

$$X_{31} = 1(6) + 3(-6) + 3(3) = 6 - 18 + 9 = -3, \quad X_{32} = 1(-3) + 3(3) + 3(3) = -3 + 9 + 9 = 15.$$

La matriz pedida es $X = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}.$

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Una empresa de mensajería opera en tres rutas distintas A, B y C. Semanalmente hace un total de 70 viajes, y el número de viajes por la ruta B es igual a la suma de los viajes por las rutas A y C.

a) [1,25 puntos] Si sabemos que el doble de la suma de los viajes por las rutas A y C es 70, ¿podemos deducir el número de viajes por cada ruta? Razona la respuesta.

b) [1,25 puntos] Si el doble de viajes por la ruta C es igual al número de viajes por la ruta B menos 5, ¿cuántos viajes hace por cada ruta?

SOLUCIÓN

Llamamos A, B, C al número de viajes semanales por cada ruta. Los datos iniciales del enunciado son:

$$A + B + C = 70, \quad B = A + C.$$

Apartado a)

El dato adicional de este apartado es:

$$2(A + C) = 70 \implies A + C = 35.$$

Idea clave

Sustituyendo $B = A + C = 35$ en la primera ecuación no aporta información nueva sobre A y C por separado: solo confirma que su suma es 35, que es exactamente lo que ya sabíamos. Con dos ecuaciones efectivamente independientes ($A + C = 35$ y $B = A + C$) para tres incógnitas, el sistema queda con un grado de libertad.

Sustituyendo $B = 35$ en $A + B + C = 70$: $A + C = 70 - 35 = 35$, que es exactamente la misma condición que ya teníamos. No hay ninguna ecuación adicional que relacione A y C por separado.

No, no podemos deducir el número de viajes de cada ruta individualmente. Sí se determina que $B = 35$, pero A y C quedan indeterminados (solo se sabe que $A + C = 35$): hay infinitas combinaciones posibles, por ejemplo $A = 20, C = 15$ o $A = 10, C = 25$, ambas compatibles con los datos.

Apartado b)

Añadimos la condición $2C = B - 5$.

Idea clave

Esta nueva condición relaciona B y C directamente, lo que por fin nos permite romper la indeterminación del apartado anterior.

Como en el apartado a) ya establecimos que $B = 35$ (esta conclusión no depende del dato del apartado b, sigue siendo válida), sustituimos en la nueva condición:

$$2C = 35 - 5 = 30 \implies C = 15.$$

Y de $A + C = 35$:

$$A = 35 - 15 = 20.$$

Comprobación: $A + B + C = 20 + 35 + 15 = 70$ (correcto); $B = A + C = 20 + 15 = 35$ (correcto); $2C = 30 = B - 5 = 35 - 5 = 30$ (correcto).

La empresa hace 20 viajes por la ruta A, 35 por la ruta B y 15 por la ruta C.

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

La recta perpendicular desde el punto $A(1, 1, 0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

a) [1,5 puntos] Calcula la ecuación del plano π .

b) [1 punto] Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Como el segmento AB es, por construcción, perpendicular al plano π (es la recta perpendicular desde A hasta π), el vector $\overrightarrow{AB}$ es directamente un vector normal de π . Y como B es el punto donde la perpendicular corta al plano, B pertenece a π .

Calculamos el vector normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = \left(1 - 1, \frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2} - 0\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Multiplicamos por 2 para eliminar fracciones (un vector normal puede escalarse libremente): $\vec{n} = (0, -1, 1)$.

La ecuación del plano, usando el punto $B\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$0(x - 1) - 1\left(y - \frac{1}{2}\right) + 1\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \implies -y + \frac{1}{2} + z - \frac{1}{2} = 0 \implies -y + z = 0.$$

El plano pedido es $\pi \equiv y - z = 0$ (equivalentemente, $z = y$).

Apartado b)

Idea clave

Como B es exactamente el punto medio entre A y su simétrico A' (por ser el pie de la perpendicular), la distancia de A a A' es el doble de la distancia de A a B .

Calculamos la distancia de A a B :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La distancia buscada es el doble:

$$d(A, A') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

La distancia de A a su simétrico A' es $\sqrt{2}$.

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -3 - \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) [1,25 puntos] Estudia la posición relativa de r y s .

b) [1,25 puntos] Halla la recta que corta perpendicularmente a r y a s .

SOLUCIÓN

Apartado a)

La recta r pasa por $P_0 = (3, 1, -3)$ con dirección $\vec{d}_r = (1, 0, -1)$.

Parametrizamos s (con $x = \mu$): de $x + y = 1$ obtenemos $y = 1 - \mu$, y $z = 0$. La recta s pasa por $Q_0 = (0, 1, 0)$ (con $\mu = 0$) con dirección $\vec{d}_s = (1, -1, 0)$.

Idea clave

Como $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$ no son proporcionales, las rectas no son paralelas. Comprobamos entonces si se cortan, igualando ambas parametrizaciones.

Igualamos $P_0 + \lambda \vec{d}_r = Q_0 + \mu \vec{d}_s$:

$$\begin{cases} 3 + \lambda = \mu \\ 1 = 1 - \mu \\ -3 - \lambda = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación: $\lambda = -3$. De la segunda: $\mu = 0$. Comprobamos la primera: $3 + (-3) = 0 = \mu = 0$ (correcto), coinciden.

Calculamos el punto con $\lambda = -3$: $(3 - 3, 1, -3 + 3) = (0, 1, 0)$.

Las rectas r y s son secantes (se cortan) en el punto $(0, 1, 0)$.

Apartado b)

Idea clave

Como r y s se cortan (no se cruzan en el espacio), la recta perpendicular a ambas es más sencilla que en el caso de rectas que se cruzan: basta con tomar el punto de corte y la dirección perpendicular a ambas ($\vec{d}_r \times \vec{d}_s$), ya que esa única recta pasa por el punto común y es perpendicular a las dos direcciones simultáneamente.

Calculamos la dirección perpendicular a ambas:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0(0) - (-1)(-1), -[1(0) - (-1)(1)], 1(-1) - 0(1)) = (-1, -1, -1).$$

Como el punto de corte hallado en el apartado anterior es $(0, 1, 0)$, la recta pedida pasa por ese punto con dirección $(-1, -1, -1)$ (o, equivalentemente, $(1, 1, 1)$):

La recta pedida es:

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + v(1, 1, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$