

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Ordinaria 2022

Matemáticas II

Sèrie 2

Baremo e instrucciones

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, es necesario que lo indiquéis claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates: el examen original permite elegir 4 de las 6 cuestiones. Como recurso de estudio, aquí resolvemos las 6 de forma completa.

PREGUNTA 1: Reconstrucción de una función a partir de su derivada**ENUNCIADO**

Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

a (0,75 puntos) Si sabemos que $f(x)$ corta el eje de abscisas en $x = 1$, calculad la expresión de la función $f(x)$.

b (0,75 puntos) Calculad la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudiad la concavidad de la función.

c (1 punto) Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es 15 u^2 . Calculad el valor de a .

SOLUCIÓN

a) Integramos $f'(x)$ para recuperar $f(x)$:

$$f(x) = \int (3x^2 - 12x) dx = x^3 - 6x^2 + C.$$

Usamos que $f(1) = 0$ (el punto de corte con el eje de abscisas):

$$1 - 6 + C = 0 \implies C = 5.$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$$

b) El punto de inflexión se busca anulando la derivada segunda.

Idea clave

Un punto de inflexión requiere $f''(x) = 0$ y que f'' cambie de signo ahí (no basta con que se anule); comprobamos esto último viendo que f''' es una constante no nula, lo que garantiza el cambio de signo.

$$f''(x) = 6x - 12.$$

$$f''(x) = 0 \implies 6x - 12 = 0 \implies x = 2.$$

Como $f'''(x) = 6 \neq 0$ (constante), f'' efectivamente cambia de signo en $x = 2$, confirmando que es un punto de inflexión.

$$x = 2 \text{ es la abscisa del punto de inflexión}$$

Estudiamos el signo de $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$:

- Si $x < 2$: $f''(x) < 0$, la función es **cóncava** (o “cóncava hacia abajo”).
- Si $x > 2$: $f''(x) > 0$, la función es **convexa** (o “cóncava hacia arriba”).

c) La curva $y = f''(x) = 6x - 12$ es una recta que corta el eje de abscisas precisamente en $x = 2$ (el punto de inflexión del apartado b, no es casualidad: $f'' = 0$ ahí por definición).

Idea clave

Como $a > 2$, el intervalo $[0, a]$ incluye el cambio de signo de f'' en $x = 2$: para $x < 2$, $f''(x) < 0$ (la curva queda por debajo del eje), y para $x > 2$, $f''(x) > 0$ (por encima). El área entre la curva y el eje debe calcularse en dos tramos, tomando el valor absoluto en cada uno.

$$S(a) = \int_0^2 |f''(x)| dx + \int_2^a |f''(x)| dx = \int_0^2 (12 - 6x) dx + \int_2^a (6x - 12) dx.$$

Calculamos la primera integral:

$$\int_0^2 (12 - 6x) dx = [12x - 3x^2]_0^2 = 24 - 12 = 12.$$

Calculamos la segunda integral:

$$\int_2^a (6x - 12) dx = [3x^2 - 12x]_2^a = (3a^2 - 12a) - (12 - 24) = 3a^2 - 12a + 12.$$

Sumando ambas:

$$S(a) = 12 + 3a^2 - 12a + 12 = 3a^2 - 12a + 24.$$

Igualamos a 15:

$$3a^2 - 12a + 24 = 15 \implies 3a^2 - 12a + 9 = 0 \implies a^2 - 4a + 3 = 0.$$

Resolvemos:

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \implies a = 3 \quad \text{o} \quad a = 1.$$

Como el enunciado exige $a > 2$, descartamos $a = 1$.

$$\boxed{a = 3}$$

PREGUNTA 2: Sistema de ecuaciones con parámetro a

ENUNCIADO

Considerad el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} ax + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + ay + z &= a \\ x + y + 4z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

a (1,5 puntos) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro a .

b (1 punto) Resolved, si es posible, el sistema para el caso $a = 2$.

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante:

$$\det(M) = 4(a - 2)(a + 1).$$

Idea clave

El determinante se anula en $a = 2$ y en $a = -1$: son los dos únicos valores que hay que discutir aparte.

Caso $a \neq 2$ y $a \neq -1$: $\det(M) \neq 0$, así que $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3$. El sistema es **compatible determinado**.

Caso $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

Se comprueba que $\text{rango}(M) = 2$ (la 1.ª fila es el doble de la 3.ª en las dos primeras columnas, pero no en la tercera, así que hay un menor de orden 2 no nulo, p.ej. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$, mientras que el determinante completo sí se anula). Comprobando los términos independientes se ve que $\text{rango}(M^*) = 2$ también. El sistema es **compatible indeterminado**.

Caso $a = -1$:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right).$$

También aquí $\text{rango}(M) = 2$ y $\text{rango}(M^*) = 2$: el sistema es **compatible indeterminado**.

Idea clave

En este caso concreto, los dos valores que anulan el determinante ($a = 2$ y $a = -1$) resultan ser compatibles indeterminados, sin ningún caso incompatible. Esto no es lo más habitual, así que conviene comprobar cuidadosamente el rango de la matriz ampliada en cada caso, en lugar de asumir automáticamente que será incompatible.

b) Para $a = 2$, ya sabemos que el sistema es compatible indeterminado, con un grado de libertad. El sistema queda

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Restando la 2.ª ecuación de la 1.ª:

$$(2x + 2y + 3z) - (2x + 2y + z) = 2 - 2 \implies 2z = 0 \implies z = 0.$$

Sustituyendo $z = 0$ en la 3.ª ecuación: $x + y = 1 \implies x = 1 - y$.

Tomando y como parámetro libre:

$$(x, y, z) = (1 - y, y, 0), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Idea clave

Comprobación con la 2.ª ecuación: $2(1 - y) + 2y + 0 = 2 - 2y + 2y = 2$ ✓, se cumple para cualquier y .

PREGUNTA 3: Recta, plano y perpendicularidad

ENUNCIADO

Sea la recta r definida por la expresión siguiente:

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

a (1,25 puntos) Determinad la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi : x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si es paralela, calculad la distancia de r a π , y si es secante, calculad el punto de corte.

b (1,25 puntos) Calculad la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta la recta r en un punto P , cuya primera coordenada es 5 veces mayor que la segunda.

SOLUCIÓN

a) El vector director de r es $\vec{d} = (1, 3, 1)$, y el vector normal de π es $\vec{n} = (1, -2, 4)$.

Idea clave

Para saber si una recta es paralela a un plano, basta comprobar si su vector director es perpendicular al vector normal del plano ($\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$). Si no lo es, la recta necesariamente corta al plano en un único punto (es secante).

Calculamos el producto escalar:

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = (1)(1) + (3)(-2) + (1)(4) = 1 - 6 + 4 = -1 \neq 0.$$

Como $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$, la recta r **no es paralela** a π : es **secante** (la corta en un único punto).

Para hallar el punto de corte, sustituimos las coordenadas paramétricas de r en la ecuación de π :

$$(2 + \lambda) - 2(-1 + 3\lambda) + 4(3 + \lambda) - 4 = 0.$$

Desarrollamos:

$$2 + \lambda + 2 - 6\lambda + 12 + 4\lambda - 4 = 0 \implies 12 - \lambda = 0 \implies \lambda = 12.$$

Sustituyendo $\lambda = 12$ en la parametrización de r :

$$x = 2 + 12 = 14, \quad y = -1 + 3(12) = 35, \quad z = 3 + 12 = 15.$$

Punto de corte: (14, 35, 15)

b) La recta s es perpendicular a π , así que su vector director es el vector normal de π : $\vec{n} = (1, -2, 4)$.

Idea clave

El punto P no se elige libremente: tiene que ser un punto concreto de r (para que s corte a r en P) que además cumpla la condición extra “primera coordenada = 5 veces la segunda”. Eso da una ecuación en λ con solución única.

Un punto genérico de r es $(2 + \lambda, -1 + 3\lambda, 3 + \lambda)$. Imponemos que la primera coordenada sea 5 veces la segunda:

$$2 + \lambda = 5(-1 + 3\lambda) \implies 2 + \lambda = -5 + 15\lambda \implies 7 = 14\lambda \implies \lambda = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$P = \left(2 + \frac{1}{2}, -1 + \frac{3}{2}, 3 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

La recta s pasa por P con dirección $\vec{n} = (1, -2, 4)$:

$$s : (x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) + t(1, -2, 4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

PREGUNTA 4: Construcción de una cúbica y área bajo una curva**ENUNCIADO**

a (1 punto) Encontrad una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de ordenadas en el punto $(0, 5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal, y que $g''(x) = 2x + 1$.

b (1,5 puntos) Comprobad que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0, 4)$. Utilizad esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

SOLUCIÓN

a) Partimos de $g''(x) = 2x + 1$ e integramos dos veces.

Idea clave

Cada dato del enunciado fija una constante de integración: la tangente horizontal en $x = 1$ fija la constante al integrar g'' (nos da g'), y el punto de corte con el eje Y fija la constante al integrar g' (nos da g).

Integramos $g''(x) = 2x + 1$:

$$g'(x) = \int (2x + 1) dx = x^2 + x + C_1.$$

“Tangente horizontal en $x = 1$ ” significa $g'(1) = 0$:

$$1 + 1 + C_1 = 0 \implies C_1 = -2.$$

$$g'(x) = x^2 + x - 2.$$

Integramos de nuevo:

$$g(x) = \int (x^2 + x - 2) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C_2.$$

“Corta el eje de ordenadas en $(0, 5)$ ” significa $g(0) = 5$:

$$0 + 0 - 0 + C_2 = 5 \implies C_2 = 5.$$

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5$$

b) Evaluamos $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ en $x = 2$:

$$f(2) = -8 + 24 - 16 = 0.$$

$$f(2) = 0, \text{ luego } x = 2 \text{ es raíz de } f.$$

Para ver que f es estrictamente creciente en $(0, 4)$, estudiamos el signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4).$$

Idea clave

Al factorizar $f'(x) = -3x(x - 4)$, basta con estudiar el signo de cada factor en el intervalo $(0, 4)$: si ambos factores “compiten” en signo de forma que el producto total sea siempre positivo, tenemos la monotonía garantizada sin evaluar punto por punto.

Para $x \in (0, 4)$: el factor x es positivo, y el factor $(x - 4)$ es negativo (ya que $x < 4$). Por tanto:

$$f'(x) = -3 \cdot (\text{positivo}) \cdot (\text{negativo}) = -3 \cdot (\text{negativo}) = \text{positivo}.$$

Como $f'(x) > 0$ en todo el intervalo $(0, 4)$, f es **estrictamente creciente** en $(0, 4)$.

f es estrictamente creciente en $(0, 4)$

Como f es estrictamente creciente en $(0, 4)$ y $f(2) = 0$, se deduce que:

- $f(x) < 0$ para $x \in (0, 2)$ (antes de llegar a la raíz, creciendo hacia 0),
- $f(x) > 0$ para $x \in (2, 4)$ (después de la raíz, siguiendo creciendo).

Por tanto, el área pedida se calcula en dos tramos, tomando el valor absoluto de f en cada uno:

$$S = \int_0^2 (-f(x)) dx + \int_2^4 f(x) dx.$$

Calculamos una primitiva de f : $F(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 16x$.

$$\int_0^2 (-f(x)) dx = -[F(2) - F(0)] = -F(2) + F(0).$$

$$F(2) = -\frac{16}{4} + 2(8) - 16(2) = -4 + 16 - 32 = -20, \quad F(0) = 0.$$

$$\int_0^2 (-f(x)) dx = -(-20) + 0 = 20.$$

$$\int_2^4 f(x) dx = F(4) - F(2).$$

$$F(4) = -\frac{256}{4} + 2(64) - 16(4) = -64 + 128 - 64 = 0.$$

$$\int_2^4 f(x) dx = 0 - (-20) = 20.$$

Sumando ambos tramos:

$$S = 20 + 20 = 40.$$

$$S = 40 \text{ u}^2$$

PREGUNTA 5: Matrices: potencias e inversa

ENUNCIADO

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a , b y c .

a (1,5 puntos) Calculad las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b (1 punto) Determinad los valores de a , b y c para que la matriz inversa de X sea $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

a) Calculamos X^2 multiplicando X por sí misma:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Al ser X triangular superior, X^2 también lo es, y la posición (1,3) del producto resulta ser siempre 1 (independientemente de a, b, c): eso explica por qué el enunciado pide precisamente X^2 con un 1 en esa posición, en vez de la identidad.

Igualamos X^2 a la matriz pedida, término a término:

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ a + b = 0 \\ b^2 = 1 \\ b + c = 0 \\ c^2 = 1 \end{cases}$$

De $a^2 = 1$: $a = \pm 1$. De $a + b = 0$: $b = -a$. Comprobamos que $b^2 = (-a)^2 = a^2 = 1$ (automático). De $b + c = 0$: $c = -b = a$. Comprobamos $c^2 = a^2 = 1$ (automático).

Así, las condiciones se reducen a $a = \pm 1$, con $b = -a$ y $c = a$. Hay dos soluciones:

Si $a = 1: b = -1, c = 1$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a = -1: b = 1, c = -1$.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(a, b, c) = (1, -1, 1) \quad \text{o} \quad (a, b, c) = (-1, 1, -1)$$

b) Ahora se nos da directamente X^{-1} , y queremos hallar a, b, c . La condición que debe cumplirse es $X \cdot X^{-1} = I_3$.

Idea clave

En vez de invertir X simbólicamente (lo que sería más laborioso, al tratarse de una matriz triangular con parámetros), es más directo imponer $X \cdot X^{-1} = I$ con la matriz X^{-1} ya conocida, y resolver las ecuaciones resultantes término a término.

$$X \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Calculamos el producto, fila a fila:

Fila 1: $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} + 1, -\frac{a}{2} + 1\right)$. Debe ser $(1, 0, 0)$:

$$\frac{a}{2} = 1 \implies a = 2.$$

(Las otras dos entradas de la fila, con $a = 2$, dan $-1 + 1 = 0$ ☐, consistente.)

Fila 2: $(0, b, b - 1)$. Debe ser $(0, 1, 0)$:

$$b = 1 \implies b - 1 = 0. \quad \text{☐}$$

Fila 3: $(0, 0, -c)$. Debe ser $(0, 0, 1)$:

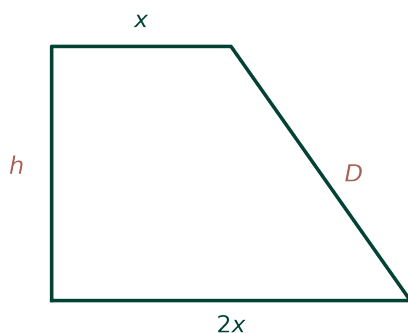
$$-c = 1 \implies c = -1.$$

$$a = 2, \quad b = 1, \quad c = -1$$

PREGUNTA 6: Optimización: el trapezio del patio escolar

ENUNCIADO

En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapezio rectangular, de manera que la base más grande mida el doble que la base más pequeña, tal como muestra la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea tan corto como sea posible.



a (1 punto) Justificad que se satisfacen las relaciones siguientes: $h = \frac{20}{x}$ y $D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.

b (1,5 puntos) Encontrad las dimensiones del trapezio para las cuales la longitud del lado D es mínima.

SOLUCIÓN

a) Según la figura, el trapezio rectangular tiene base menor x , base mayor $2x$, altura h (el lado vertical, perpendicular a ambas bases) y lado oblicuo D (la hipotenusa que cierra la figura por la derecha).

Idea clave

En un trapezio rectangular, uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases (ahí no hay ningún triángulo que formar), y el otro lado no paralelo (aquí, D) es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura h y la diferencia entre las dos bases.

El área de un trapezio es $\frac{(\text{base mayor} + \text{base menor})}{2} \cdot \text{altura}$. Con base mayor $2x$, base menor x y altura h , e imponiendo que el área sea 30 m^2 :

$$\frac{2x + x}{2} \cdot h = 30 \implies \frac{3x}{2}h = 30 \implies h = \frac{60}{3x} = \frac{20}{x}.$$

$$h = \frac{20}{x}$$

Para D : el lado oblicuo cierra el trapezio conectando el extremo de la base menor con el extremo de la base mayor. La diferencia entre las dos bases es $2x - x = x$, que es precisamente el cateto horizontal del triángulo rectángulo que forma D ; el otro cateto es la altura h . Por el teorema de Pitágoras:

$$D(x) = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{20}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{400}{x^2}}.$$

$$D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$$

b) Para minimizar $D(x)$, es más cómodo minimizar $D(x)^2$ (el mínimo se alcanza en el mismo punto, ya

que la raíz cuadrada es una función creciente):

$$D(x)^2 = x^2 + \frac{400}{x^2}, \quad x > 0.$$

Derivamos:

$$\frac{d}{dx}(D(x)^2) = 2x - \frac{800}{x^3}.$$

Igualamos a cero:

$$2x - \frac{800}{x^3} = 0 \implies 2x = \frac{800}{x^3} \implies 2x^4 = 800 \implies x^4 = 400 \implies x^2 = 20 \implies x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

(Descartamos la solución negativa, ya que x es una longitud.)

Comprobamos que es un mínimo: para $x < 2\sqrt{5}$, $2x - \frac{800}{x^3} < 0$ (decreciente); para $x > 2\sqrt{5}$, $2x - \frac{800}{x^3} > 0$ (creciente). Por tanto, $x = 2\sqrt{5}$ es efectivamente un **mínimo**.

$$x = 2\sqrt{5} \text{ m} \approx 4,47 \text{ m}$$

Calculamos las demás dimensiones. La altura:

$$h = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

Idea clave

De nuevo aparece la coincidencia $x = h$ en el óptimo: es la misma razón estructural que en otros problemas de este tipo (aquí, minimizar $x^2 + 400/x^2$ con el producto $x^2 \cdot (400/x^2) = 400$ fijo, que por la desigualdad entre medias se optimiza cuando ambos términos son iguales, es decir, cuando $x^2 = 400/x^2$, o $x = h$).

La base mayor es $2x = 4\sqrt{5} \approx 8,94$ m.

El valor mínimo de D :

$$D_{\min} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{20 + 20} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

$$\text{Base menor } x = 2\sqrt{5} \text{ m, base mayor } 2x = 4\sqrt{5} \text{ m, } h = 2\sqrt{5} \text{ m, } D_{\min} = 2\sqrt{10} \text{ m} \approx 6,32 \text{ m}$$

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Ordinaria 2022

Matemáticas II

Sèrie 5

Baremo e instruccions

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, es necesario que lo indiquéis claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates: el examen original permite elegir 4 de las 6 cuestiones. Como recurso de estudio, aquí resolvemos las 6 de forma completa.

PREGUNTA 1: Matrices: una potencia cíclica y una ecuación matricial**ENUNCIADO**

Sean las matrices $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a (1,5 puntos) Comprobad que $C^3 = I_2$, en que I_2 es la matriz identidad de orden 2, y deducid que la matriz C es invertible y que $C^{-1} = C^2$. Calculad C^{2022} .

b (1 punto) Resolved la ecuación matricial $C \cdot X = A - 2I_2$.

SOLUCIÓN

a) Calculamos primero C^2 :

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-1) + 1(-1) & (-1)(1) + 1(0) \\ (-1)(-1) + 0(-1) & (-1)(1) + 0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos $C^3 = C^2 \cdot C$:

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(-1) + (-1)(-1) & 0(1) + (-1)(0) \\ 1(-1) + (-1)(-1) & 1(1) + (-1)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$\boxed{C^3 = I_2}$$

Idea clave

Que $C^3 = I_2$ significa que $C \cdot C^2 = I_2$ (agrupando el producto como $C \cdot (C \cdot C)$). Por definición, eso dice exactamente que C^2 es la matriz inversa de C : no hace falta calcular la inversa por el método general (adjunta y determinante).

Como $C \cdot C^2 = C^2 \cdot C = I_2$ (el producto de C y C^2 conmuta, ya que ambas son potencias de la misma matriz), por definición de matriz inversa:

$$C^{-1} = C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En particular, como existe C^{-1} , la matriz C es **invertible**.

Para calcular C^{2022} , aprovechamos que $C^3 = I_2$: las potencias de C se repiten con periodo 3.

Idea clave

Cuando una matriz cumple $C^n = I$, todas sus potencias se pueden reducir usando el resto de dividir el exponente entre n : $C^k = C^{k \bmod n}$. Aquí basta con dividir 2022 entre 3.

Como $2022 = 3 \cdot 674$ (es decir, 2022 es múltiplo exacto de 3, con resto 0):

$$C^{2022} = (C^3)^{674} = I_2^{674} = I_2.$$

$$C^{2022} = I_2$$

b) Buscamos X tal que $C \cdot X = A - 2I_2$. Como C es invertible, multiplicamos ambos lados por C^{-1} por la izquierda:

$$X = C^{-1} \cdot (A - 2I_2).$$

Calculamos primero $A - 2I_2$:

$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Como ya sabemos que $C^{-1} = C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(0) + (-1)(3) & 0(0) + (-1)(-3) \\ 1(0) + (-1)(3) & 1(0) + (-1)(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 2: La cúbica $f(x) = x^3$: tangente y área**ENUNCIADO**

Considerad la función $f(x) = x^3$ y sea a un número real estrictamente positivo.

a (1,25 puntos) Calculad la ecuación de la recta t tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = a$. Encontrad el punto de corte de la recta t con el eje de abscisas (en función de a).

b (1,25 puntos) Haced un esbozo de la gráfica de la función f y la recta t . Calculad el valor de a para que el área en el primer cuadrante limitada por la función f , la recta t y el eje de abscisas sea 108 u^2 .

SOLUCIÓN

a) Derivamos $f(x) = x^3$:

$$f'(x) = 3x^2.$$

En $x = a$: $f(a) = a^3$, $f'(a) = 3a^2$.

La recta tangente es

$$y - a^3 = 3a^2(x - a) \implies y = 3a^2x - 3a^3 + a^3 = 3a^2x - 2a^3.$$

$$t : y = 3a^2x - 2a^3$$

El corte con el eje de abscisas se obtiene con $y = 0$:

$$0 = 3a^2x - 2a^3 \implies x = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Corte con el eje } X : x = \frac{2a}{3}$$

b) Antes de calcular el área, veamos cómo se relacionan f y t .

Idea clave

Cuando una recta es tangente a una curva en $x = a$, la diferencia $f(x) - t(x)$ tiene necesariamente una raíz doble en $x = a$ (por eso es tangente, no secante). Factorizando esa diferencia se entiende exactamente en qué zonas la curva queda por encima o por debajo de la tangente.

Calculamos la diferencia:

$$f(x) - t(x) = x^3 - 3a^2x + 2a^3.$$

Esta expresión tiene una raíz doble en $x = a$ (por ser t tangente a f ahí) y se puede factorizar como

$$f(x) - t(x) = (x - a)^2(x + 2a).$$

Para $x > 0$ y $a > 0$, el factor $(x - a)^2 \geq 0$ siempre, y el factor $(x + 2a) > 0$ siempre (suma de dos positivos). Por tanto, $f(x) - t(x) \geq 0$ para todo $x > 0$: **la curva f siempre queda por encima de la tangente t (tocándola solo en $x = a$).**

[Esbozo: la cúbica $f(x) = x^3$ pasa por el origen y crece; la recta t es tangente en (a, a^3) y corta el eje X en $x = \frac{2a}{3}$, quedando por debajo de la curva en todo el tramo $x > 0$.]

Idea clave

La región pedida (en el primer cuadrante, limitada por f , t y el eje X) es una región “compuesta”: de $x = 0$ a $x = \frac{2a}{3}$, el límite inferior es el eje X (porque ahí $t(x) < 0$, fuera del primer cuadrante); de $x = \frac{2a}{3}$ a $x = a$, el límite inferior pasa a ser la propia recta t (que ya es positiva). En ambos tramos, el límite superior es la curva f .

El área se descompone en dos tramos:

$$S(a) = \int_0^{2a/3} f(x) dx + \int_{2a/3}^a (f(x) - t(x)) dx.$$

Calculamos la primera integral:

$$\int_0^{2a/3} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{2a/3} = \frac{1}{4} \left(\frac{2a}{3} \right)^4 = \frac{16a^4}{4 \cdot 81} = \frac{4a^4}{81}.$$

Calculamos la segunda integral, usando la factorización $f(x) - t(x) = (x - a)^2(x + 2a)$:

$$\int_{2a/3}^a (x - a)^2(x + 2a) dx.$$

Idea clave

Aunque se podría expandir el producto $(x - a)^2(x + 2a)$ y integrar término a término, es más rápido hacer el cambio de variable $u = x - a$ (que traslada la raíz doble al origen), ya que entonces $(x + 2a) = (u + 3a)$.

Con el cambio $u = x - a$ (así $du = dx$; cuando $x = \frac{2a}{3}$, $u = -\frac{a}{3}$; cuando $x = a$, $u = 0$):

$$\int_{-a/3}^0 u^2(u + 3a) du = \int_{-a/3}^0 (u^3 + 3au^2) du = \left[\frac{u^4}{4} + au^3 \right]_{-a/3}^0.$$

Evaluamos:

$$(0 + 0) - \left(\frac{(-a/3)^4}{4} + a(-a/3)^3 \right) = - \left(\frac{a^4/81}{4} - \frac{a^4}{27} \right) = -\frac{a^4}{324} + \frac{a^4}{27}.$$

Ponemos sobre el mismo denominador ($324 = 27 \cdot 12$):

$$-\frac{a^4}{324} + \frac{12a^4}{324} = \frac{11a^4}{324}.$$

Sumando las dos partes del área:

$$S(a) = \frac{4a^4}{81} + \frac{11a^4}{324}.$$

Ponemos sobre denominador común ($324 = 81 \cdot 4$):

$$S(a) = \frac{16a^4}{324} + \frac{11a^4}{324} = \frac{27a^4}{324} = \frac{a^4}{12}.$$

Igualamos a 108:

$$\frac{a^4}{12} = 108 \implies a^4 = 1296 \implies a = \sqrt[4]{1296}.$$

Como $6^4 = 1296$ y $a > 0$:

$$a = 6$$

PREGUNTA 3: Sistema de ecuaciones con parámetro m : posición de tres planos

ENUNCIADO

Considerad el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{array} \right\}$$

en que m es un parámetro real.

a (1,25 puntos) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro m .

b (1,25 puntos) Resolved el sistema, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 3$. En cada caso, dad la posición relativa de los tres planos en $\mathbb{R}^3$.

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3 - m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante:

$$\det(M) = 2m(m - 3).$$

Idea clave

El determinante se anula en $m = 0$ y en $m = 3$: son los dos valores que hay que discutir aparte.

Caso $m \neq 0$ y $m \neq 3$: $\det(M) \neq 0$, así que el sistema es **compatible determinado**.

Caso $m = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array} \right).$$

Se comprueba que $\text{rango}(M) = 2$ y que $\text{rango}(M^*) = 2$ también. El sistema es **compatible indeterminado**.

Caso $m = 3$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array} \right).$$

Idea clave

Fijaos en que, con $m = 3$, la 1.ª y la 3.ª ecuación tienen exactamente los mismos coeficientes $(2, -1, 3)$, pero términos independientes distintos $(0$ frente a $6)$: esto es la señal más clara de un sistema incompatible, ya que corresponde a dos planos paralelos y distintos, que nunca pueden tener puntos en común.

Aquí $\text{rango}(M) = 2$, pero $\text{rango}(M^*) = 3$ (no hay forma de que las filas de M^* cumplan la misma relación de dependencia que las de M , ya que $0 \neq 6$). Como $\text{rango}(M) \neq \text{rango}(M^*)$, el sistema es **incompatible**.

b) Caso $m = 0$: el sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ 3z = -6 \\ 2x - y = 6 \end{array} \right\}$$

De la 2.ª ecuación: $z = -2$.

De la 3.ª ecuación: $2x - y = 6 \Rightarrow y = 2x - 6$.

Tomando x como parámetro:

$$(x, y, z) = (x, 2x - 6, -2), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (m = 0)$$

Idea clave

Comprobación con la 1.ª ecuación: $2x - (2x - 6) + 3(-2) = 2x - 2x + 6 - 6 = 0$ ✓, se cumple para cualquier x .

Posición relativa de los tres planos (caso $m = 0$): como el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad, y ningún par de planos resulta ser paralelo (se puede comprobar que sus vectores normales, $(2, -1, 3)$, $(0, 0, 3)$ y $(2, -1, 0)$, no son proporcionales entre sí dos a dos), los **tres planos se cortan en una única recta común** (forman un “haz” de planos por esa recta).

Caso $m = 3$: ya hemos visto en el apartado a) que el sistema es **incompatible**: no hay solución.

Posición relativa de los tres planos (caso $m = 3$): con $m = 3$, la 1.ª ecuación ($2x - y + 3z = 0$) y la 3.ª ecuación ($2x - y + 3z = 6$) tienen exactamente el mismo vector normal, $(2, -1, 3)$, pero distinto término independiente: son **dos planos paralelos y distintos**. El segundo plano ($3y = -6$, es decir, $y = -2$) tiene un vector normal distinto, $(0, 1, 0)$, no proporcional a los anteriores, así que corta a cada uno de los otros dos en una recta distinta. La configuración es la de **dos planos paralelos cortados por un tercer plano no paralelo a ellos** (sin ningún punto común a los tres).

PREGUNTA 4: Optimización de un triángulo rectángulo**ENUNCIADO**

En $\mathbb{R}^2$, considerad los triángulos rectángulos que tienen los vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$ e $y > 0$, y en que la suma de los catetos es 10.

a (1,25 puntos) Expresad el área del triángulo AOB en función de x . ¿Para qué valor de x el área del triángulo AOB es lo más grande posible? ¿Qué valor tiene esta área máxima?

b (1,25 puntos) Expresad la hipotenusa del triángulo AOB en función de x . ¿Para qué valor de x la hipotenusa del triángulo AOB es lo más pequeña posible? ¿Cuál es este valor mínimo?

SOLUCIÓN

Como la suma de los catetos es 10, tenemos la restricción $x + y = 10$, es decir, $y = 10 - x$, con $0 < x < 10$.

a) El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de los catetos:

$$S(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(10 - x) = 5x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 < x < 10.$$

$$S(x) = \frac{1}{2}x(10 - x)$$

Derivamos:

$$S'(x) = 5 - x.$$

Igualemos a cero:

$$5 - x = 0 \implies x = 5.$$

Comprobamos que es un máximo: $S''(x) = -1 < 0$ (constante negativa), así que $x = 5$ es efectivamente un **máximo**.

$$x = 5$$

El área máxima es

$$S(5) = \frac{1}{2}(5)(10 - 5) = \frac{1}{2}(5)(5) = \frac{25}{2} = 12,5.$$

$$S_{\text{máx}} = 12,5 \text{ u}^2$$

Idea clave

Tiene sentido que el área máxima se alcance en $x = y = 5$: con una suma de catetos fija, el rectángulo (y por tanto el triángulo que forma media diagonal) de área máxima es siempre el más “equilibrado”, es decir, el que tiene los dos catetos iguales.

b) La hipotenusa, por el teorema de Pitágoras, es

$$H(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2}, \quad 0 < x < 10.$$

$$H(x) = \sqrt{x^2 + (10 - x)^2}$$

Idea clave

Para derivar más cómodamente, minimizamos $H(x)^2$ en vez de $H(x)$: como la raíz cuadrada es una función estrictamente creciente, el mínimo se alcanza en el mismo punto x .

$$H(x)^2 = x^2 + (10 - x)^2.$$

Derivamos:

$$\frac{d}{dx}(H(x)^2) = 2x - 2(10 - x) = 2x - 20 + 2x = 4x - 20.$$

Igualamos a cero:

$$4x - 20 = 0 \implies x = 5.$$

Comprobamos que es un mínimo: la derivada segunda de $H(x)^2$ es $4 > 0$ (constante positiva), así que $x = 5$ es efectivamente un **mínimo**.

$$x = 5$$

El valor mínimo de la hipotenusa es

$$H(5) = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

$$H_{\min} = 5\sqrt{2} \text{ u} \approx 7,07 \text{ u}$$

Idea clave

De nuevo el óptimo se alcanza en $x = y = 5$: tanto el área máxima como la hipotenusa mínima ocurren en el mismo triángulo (el isósceles, con los dos catetos iguales), aunque esto no es una coincidencia general sino consecuencia de que la restricción $x + y = 10$ es simétrica en x e y , igual que las dos funciones que se están optimizando.

PREGUNTA 5: Puntos alineados y el plano que determinan

ENUNCIADO

Sean los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ y $D = (1, 0, 1)$.

a (1,25 puntos) Comprobad que tres de estos puntos están alineados. Determinad cuáles son los tres puntos y calculad la ecuación continua y la ecuación paramétrica de la recta que definen.

b (1,25 puntos) Calculad la ecuación general o cartesiana del plano que determinan los cuatro puntos.

SOLUCIÓN

a) Para comprobar si tres puntos están alineados, formamos vectores entre ellos y vemos si son proporcionales (paralelos).

Idea clave

Tres puntos P, Q, R están alineados exactamente cuando los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos (uno es múltiplo escalar del otro). Conviene probar primero con los puntos que “visualmente” parecen más prometedores; aquí, A, B y C tienen una estructura muy simétrica (B y C son opuestos entre sí respecto a A).

Probamos con A, B y C . Calculamos los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, -1, 0).$$

Observamos que

$$\overrightarrow{AC} = -1 \cdot \overrightarrow{AB},$$

es decir, $\overrightarrow{AC}$ es un múltiplo escalar de $\overrightarrow{AB}$. Por tanto, los vectores son paralelos, y los puntos A , B y C están **alineados**.

Idea clave

Como comprobación, verificamos que D no pertenece a esta misma recta: $\overrightarrow{AD} = (1, 0, 0)$, que no es proporcional a $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ (no existe ningún k tal que $(1, 0, 0) = k(1, 1, 0)$). Así confirmamos que son exactamente A , B , C los alineados, y no otra terna.

Los puntos alineados son A , B y C .

La recta que definen pasa por $A = (0, 0, 1)$ con vector director $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$.

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ecuación continua: como la tercera componente del vector director es 0, no podemos poner $z - 1$ en un denominador (no se puede dividir entre 0); en su lugar, la ecuación continua se escribe indicando que z permanece constante:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1}, \quad z = 1.$$

b) Buscamos el plano que determinan los cuatro puntos A, B, C, D .

Idea clave

Como A, B, C están alineados (apartado a), el plano que buscamos es, en realidad, el plano que contiene a esa recta y al punto D (que no está en ella). Basta con tomar dos vectores no paralelos con origen en A —por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ — y calcular su producto vectorial para obtener un vector normal al plano.

Tomamos $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AD} = (1, 0, 0)$. El vector normal del plano es su producto vectorial:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0 - 0 \cdot 0, -(1 \cdot 0 - 0 \cdot 1), 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (0, 0, -1).$$

El plano pasa por $A = (0, 0, 1)$ con normal $\vec{n} = (0, 0, -1)$ (o, equivalentemente, $(0, 0, 1)$):

$$0(x - 0) + 0(y - 0) - 1(z - 1) = 0 \implies -z + 1 = 0 \implies z = 1.$$

Plano: $z - 1 = 0$ (es decir, $z = 1$)

Idea clave

Este resultado, aunque sencillo, es coherente: los cuatro puntos dados, A, B, C, D , tienen todos coordenada $z = 1$. Por eso el plano que los contiene a los cuatro es, directamente, el plano horizontal $z = 1$ —sin que haga falta que ningún subconjunto de ellos esté alineado para llegar a esa conclusión, aunque el enunciado nos haya guiado por ese camino en el apartado a).

PREGUNTA 6: El método de bisección**ENUNCIADO**

La columna de la izquierda de la tabla siguiente muestra el esquema de un programa informático que se ha elaborado para encontrar soluciones aproximadas de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo (a, b) , sabiendo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la derecha recoge un ejemplo de funcionamiento del programa en que se puede ver cómo actuaría para encontrar una solución de la ecuación $x + \ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0,5$ y $b = 2$.

Esquema del programa	Ejemplo
1. Escribir «Introducid un valor a »	El usuario introduce $a = 0,5$
2. Escribir «Introducid un valor b »	El usuario introduce $b = 2$
3. Escribir «Introducid una función $f(x)$ »	El usuario introduce $f(x) = x + \ln(x)$
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la media entre a y b y le asigna el nombre $c = (0,5 + 2)/2 = 1,25$
5. Si $f(a) \cdot f(c) < 0$, entonces reasignar $b = c$; en caso contrario, reasignar $a = c$	El programa comprueba que $f(0,5) \cdot f(1,25) = (0,5 + \ln(0,5)) \cdot (1,25 + \ln(1,25)) < 0$; por tanto, reasigna $b = 1,25$
6. Repetir los pasos 4 y 5 tantas veces como haga falta hasta que $f(a) - f(b) < 0,00000001$	El programa va repitiendo la comprobación anterior, cambiando cada vez los valores de a o de b : (tabla de iteraciones: inicio $a = 0,5$, $b = 2$; tras varias iteraciones los valores de a y b se van acercando, p. ej. iteración 7: $a = 0,55859375$, $b = 0,5703125$)
7. Cuando $f(a) - f(b) < 0,00000001$, escribir: «La solución de la ecuación es c » y detener el programa	Después de unas 30 iteraciones, el programa escribe: «La solución de la ecuación es $0,56714329$ »

a (1,25 puntos) Explicad por qué este programa es capaz de encontrar una solución aproximada de la ecuación $x + \ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0,5$ y $b = 2$.

b (1,25 puntos) Queremos aplicar este programa para encontrar las tres raíces de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ con valores de a y b diferentes. Encontrad justificadamente entre qué valores a y b , para cada raíz, hay que aplicar el programa para encontrar aproximaciones de cada una de las tres raíces de la función.

SOLUCIÓN

a) El programa descrito es el conocido como **método de bisección**, y su fundamento teórico es el **teorema de Bolzano**.

Idea clave

El teorema de Bolzano garantiza la existencia de una raíz cuando hay continuidad y cambio de signo; el método de bisección va “estrechando el cerco” sobre esa raíz aplicando el mismo teorema una y otra vez, cada vez a un intervalo más pequeño.

La función $f(x) = x + \ln(x)$ es continua en su dominio $(0, +\infty)$ (suma de dos funciones continuas), y en particular en el intervalo $[0,5, 2]$. Comprobamos el signo en los extremos:

$$f(0,5) = 0,5 + \ln(0,5) \approx 0,5 - 0,693 = -0,193 < 0,$$

$$f(2) = 2 + \ln(2) \approx 2 + 0,693 = 2,693 > 0.$$

Como f es continua en $[0,5, 2]$ y $f(0,5) \cdot f(2) < 0$ (cambia de signo), por el teorema de Bolzano existe al menos una raíz $c \in (0,5, 2)$.

El programa calcula el punto medio c del intervalo y comprueba en cuál de las dos mitades, $[a, c]$ o $[c, b]$, sigue habiendo cambio de signo (comprobando el producto $f(a) \cdot f(c)$): esa mitad es la que *sigue conteniendo la raíz*, por el mismo teorema de Bolzano aplicado ahora a un intervalo más pequeño. Repitiendo este proceso, el intervalo que contiene a la raíz se va reduciendo a la mitad en cada paso, y su longitud tiende a 0; por tanto, a y b (y el punto medio c) se van acercando cada vez más al valor exacto de la raíz, hasta alcanzar la precisión deseada ($f(a) - f(b) < 0,00000001$).

Idea clave

Como f es además estrictamente creciente en $(0, +\infty)$ (al ser x e $\ln(x)$ ambas crecientes), la raíz que encuentra el programa es, de hecho, la única raíz de la ecuación en todo su dominio, no solo en el intervalo $(0,5, 2)$.

b) Buscamos intervalos (a, b) donde $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ cambie de signo, uno para cada una de sus tres raíces.

Idea clave

Como f es un polinomio (continuo en todo $\mathbb{R}$), basta con evaluar f en algunos números enteros sencillos e ir buscando cambios de signo: cada cambio de signo, por Bolzano, encierra una raíz.

Evaluamos f en varios puntos enteros:

$$f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 1 - 3 + 1 = -1, \quad f(2) = 8 - 12 + 1 = -3, \quad f(3) = 27 - 27 + 1 = 1.$$

Observamos tres cambios de signo:

- Entre $x = -1$ ($f = -3 < 0$) y $x = 0$ ($f = 1 > 0$): hay una raíz en $(-1, 0)$.
- Entre $x = 0$ ($f = 1 > 0$) y $x = 1$ ($f = -1 < 0$): hay una raíz en $(0, 1)$.
- Entre $x = 2$ ($f = -3 < 0$) y $x = 3$ ($f = 1 > 0$): hay una raíz en $(2, 3)$.

Como f es un polinomio de grado 3, tiene como máximo 3 raíces reales; al haber encontrado ya tres cambios de signo (y por tanto, tres raíces), estas son **todas** las raíces de f .

Para aproximar las tres raíces, se puede aplicar el programa con $(a, b) = (-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(2, 3)$.