

Prueba de Acceso a la Universidad

Andalucía -- Extraordinaria 2025

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Acceso a la Universidad y Prueba de Admisión – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Curso 2024–2025.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.
- d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.
- e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.
- h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

BLOQUE OBLIGATORIO

Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

SOLUCIÓN

Llamamos x , y , z a los tres números naturales (primero, segundo y tercero, respectivamente). Los datos del enunciado son:

$$x + y + z = 22, \quad 4x + 3y + 2z = 61.$$

Idea clave

Tenemos un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas: no puede tener solución única, sino una familia de soluciones dependiente de un parámetro. Conviene despejar dos incógnitas en función de la tercera para poder analizar todos los casos posibles con comodidad.

De la primera ecuación, $z = 22 - x - y$. Sustituyendo en la segunda:

$$4x + 3y + 2(22 - x - y) = 61 \implies 4x + 3y + 44 - 2x - 2y = 61 \implies 2x + y = 17 \implies y = 17 - 2x.$$

Y entonces:

$$z = 22 - x - (17 - 2x) = 22 - x - 17 + 2x = 5 + x.$$

Así, toda solución del sistema tiene la forma:

$$(x, y, z) = (x, 17 - 2x, 5 + x),$$

donde x es un número natural que además debe hacer que $y = 17 - 2x$ sea también un número natural (es decir, $y \geq 0$, lo que exige $x \leq 8$).

¿Puede ser 15 uno de los tres números? Estudiamos los tres casos por separado.

Si $x = 15$ (el primero es 15): entonces $y = 17 - 2(15) = -13$, que no es un número natural. **No es posible.**

Si $z = 15$ (el tercero es 15): entonces $5 + x = 15 \implies x = 10$, y $y = 17 - 2(10) = -3$, que tampoco es natural. **No es posible.**

Si $y = 15$ (el segundo es 15): entonces $17 - 2x = 15 \implies x = 1$, y $z = 5 + 1 = 6$. Ambos son números naturales. **Sí es posible.**

Comprobación: $1 + 15 + 6 = 22$ ✓; $4(1) + 3(15) + 2(6) = 4 + 45 + 12 = 61$ ✓.

Sí, 15 puede ser uno de los números: concretamente, el segundo. Los otros dos son $x = 1$ (primero) y $z = 6$ (tercero).

Idea clave

La pregunta “¿existen otras opciones?” se refiere al sistema en general (no solo al caso en que aparece el 15): como el sistema tiene infinitas soluciones dependientes del parámetro x , existen otras ternas de números naturales que también cumplen ambas condiciones del enunciado, aunque ninguna de ellas coincida además con la condición adicional de tener un 15.

Sí existen otras opciones: para cada valor de x entre 0 y 8 (natural) se obtiene una terna distinta que verifica las dos condiciones del enunciado. Por ejemplo:

$$x = 0 : (0, 17, 5); \quad x = 2 : (2, 13, 7); \quad x = 8 : (8, 1, 13); \quad \dots$$

En total hay 9 ternas de números naturales posibles (para $x = 0, 1, 2, \dots, 8$), y solo una de ellas ($x = 1$) contiene un 15.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN**Idea clave**

El denominador $x^2 + 2x + 2$ no tiene raíces reales (su discriminante es $4 - 8 = -4 < 0$), así que no podemos usar fracciones simples con factores lineales. En su lugar, completamos el cuadrado para reconocer la forma de la derivada del arcotangente.

Completamos el cuadrado en el denominador:

$$x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1 = (x + 1)^2 + 1.$$

Por tanto:

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

Idea clave

Esta integral tiene la forma $\int \frac{u'(x)}{u(x)^2 + 1} dx = \arctan(u(x)) + C$, con $u(x) = x + 1$ (y $u'(x) = 1$).

$$\int f(x) dx = \arctan(x + 1) + C.$$

Imponemos que la gráfica de la primitiva pase por $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$:

$$F(0) = \arctan(0 + 1) + C = \arctan(1) + C = \frac{\pi}{4} + C.$$

Igualamos a $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} + C = \frac{\pi}{4} \implies C = 0.$$

La primitiva pedida es $F(x) = \arctan(x + 1)$.

EJERCICIO 3 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = 2$.

SOLUCIÓN

Idea clave

Como k es una constante (no depende de x), podemos sacar el factor e^{-k} fuera de la integral: $e^{x-k} = e^{-k} \cdot e^x$. Así solo queda una integral en x que no depende de k , y despejamos k al final.

$$\int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = e^{-k} \int_1^3 e^x(x-2) dx.$$

Calculamos la integral por partes, con $u = x - 2$ ($du = dx$) y $dv = e^x dx$ ($v = e^x$):

$$\int e^x(x-2) dx = e^x(x-2) - \int e^x dx = e^x(x-2) - e^x = e^x(x-3).$$

Evalúamos entre 1 y 3:

$$\left[e^x(x-3) \right]_1^3 = e^3(3-3) - e^1(1-3) = 0 - e(-2) = 2e.$$

Por tanto:

$$\int_1^3 e^{x-k}(x-2) dx = e^{-k} \cdot 2e = 2e^{1-k}.$$

Iguálamos a 2:

$$2e^{1-k} = 2 \implies e^{1-k} = 1 \implies 1-k = 0 \implies k = 1.$$

El valor pedido es $k = 1$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

- a) [1,5 puntos] Halla m para que r y π sean paralelos.
 b) [1 punto] Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π .

SOLUCIÓN

Apartado a)

La recta r viene dada como intersección de dos planos, con normales $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 2, -1)$.

Idea clave

Un vector director de una recta definida como intersección de dos planos es siempre el producto vectorial de sus dos normales: $\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, ya que esta dirección es perpendicular a ambas normales simultáneamente (y por tanto está contenida en ambos planos).

$$\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = ((-1)(-1) - 1(2), -[1(-1) - 1(1)], 1(2) - (-1)(1)) = (-1, 2, 3).$$

El vector normal del plano π es $\vec{n}_\pi = (m, -1, -2)$.

Idea clave

Para que la recta sea paralela al plano (y no esté contenida en él, ni lo corte), su dirección debe ser perpendicular a la normal del plano: $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$.

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1)(m) + 2(-1) + 3(-2) = -m - 2 - 6 = -m - 8 = 0 \implies m = -8.$$

El valor pedido es $m = -8$.

Apartado b)

Con $m = -8$, el plano es $\pi \equiv -8x - y - 2z = 5$, es decir, $-8x - y - 2z - 5 = 0$.

Buscamos un punto de la recta r . Tomando $z = 0$ en el sistema de r :

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Restando la primera a la segunda: $3y = 1 \implies y = \frac{1}{3}$, y entonces $x = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$. El punto es $P_0 = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

Idea clave

Como ya sabemos (del apartado a) que r y π son paralelas cuando $m = -8$, la distancia entre ellas es simplemente la distancia de cualquier punto de r al plano π : no hace falta ningún cálculo adicional de posición relativa.

$$d(r, \pi) = d(P_0, \pi) = \frac{\left| -8\left(\frac{10}{3}\right) - \frac{1}{3} - 2(0) - 5 \right|}{\sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\left| -\frac{80}{3} - \frac{1}{3} - 5 \right|}{\sqrt{69}}.$$

Simplificamos el numerador:

$$-\frac{80}{3} - \frac{1}{3} - 5 = -\frac{81}{3} - 5 = -27 - 5 = -32.$$

$$d(r, \pi) = \frac{|-32|}{\sqrt{69}} = \frac{32}{\sqrt{69}} = \frac{32\sqrt{69}}{69} \approx 3,85.$$

La distancia de r a π es $\frac{32\sqrt{69}}{69} \approx 3,85$ unidades.

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Sean las rectas $r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$

a) [1 punto] Estudia la posición relativa de las rectas r y s .

b) [1,5 puntos] Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s .

SOLUCIÓN

Apartado a)

La recta r pasa por $P_0 = (-1, -2, 2)$ con dirección $\vec{d}_r = (4, 3, -1)$. La recta s pasa por $Q_0 = (1, 2, -3)$ con dirección $\vec{d}_s = (-1, 1, -2)$.

Idea clave

El procedimiento habitual para estudiar la posición relativa de dos rectas es: primero comprobar si son paralelas (direcciones proporcionales); si no lo son, comprobar si se cortan resolviendo el sistema que iguala ambas parametrizaciones.

Las direcciones $(4, 3, -1)$ y $(-1, 1, -2)$ no son proporcionales (por ejemplo, $4/(-1) \neq 3/1$), así que **las rectas no son paralelas**.

Comprobamos si se cortan. Igualamos un punto genérico de cada recta:

$$r : (-1 + 4t, -2 + 3t, 2 - t), \quad s : (1 - \lambda, 2 + \lambda, -3 - 2\lambda).$$

Igualando las dos primeras coordenadas:

$$\begin{cases} -1 + 4t = 1 - \lambda \\ -2 + 3t = 2 + \lambda \end{cases} \implies \begin{cases} 4t + \lambda = 2 \\ 3t - \lambda = 4 \end{cases}.$$

Sumando ambas ecuaciones: $7t = 6 \implies t = \frac{6}{7}$. Sustituyendo en la primera: $\lambda = 2 - 4\left(\frac{6}{7}\right) = 2 - \frac{24}{7} = -\frac{10}{7}$.

Comprobamos si estos valores también satisfacen la tercera coordenada:

$$2 - t = 2 - \frac{6}{7} = \frac{8}{7}, \quad -3 - 2\lambda = -3 - 2\left(-\frac{10}{7}\right) = -3 + \frac{20}{7} = -\frac{1}{7}.$$

Como $\frac{8}{7} \neq -\frac{1}{7}$, el sistema es incompatible: **las rectas no se cortan**.

Al no ser paralelas ni cortarse, r y s son rectas cruzadas (se cruzan en el espacio).

Apartado b)

Idea clave

Necesitamos un plano que contenga dos direcciones: la de r (dato del enunciado) y la de una recta perpendicular a la vez a r y a s . Esta segunda dirección es exactamente el producto vectorial $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$, ya que ese vector es, por construcción, perpendicular a ambas direcciones.

Calculamos primero esa dirección perpendicular común:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3(-2) - (-1)(1), -[4(-2) - (-1)(-1)], 4(1) - 3(-1)) = (-5, 9, 7).$$

El plano buscado tiene dos direcciones: $\vec{d}_r = (4, 3, -1)$ (contiene a r) y $(-5, 9, 7)$ (la perpendicular común). Su vector normal es el producto vectorial de ambas:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times (-5, 9, 7) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & 7 \end{vmatrix} = (3(7) - (-1)(9), -[4(7) - (-1)(-5)], 4(9) - 3(-5)) = (30, -23, 51).$$

Usamos el punto $P_0(-1, -2, 2) \in r$ para escribir la ecuación del plano:

$$30(x + 1) - 23(y + 2) + 51(z - 2) = 0.$$

Desarrollamos:

$$30x + 30 - 23y - 46 + 51z - 102 = 0 \implies 30x - 23y + 51z - 118 = 0.$$

Comprobación: sustituyendo $P_0(-1, -2, 2)$: $30(-1) - 23(-2) + 51(2) - 118 = -30 + 46 + 102 - 118 = 0$ ✓.

El plano pedido es $30x - 23y + 51z - 118 = 0$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1.$$

SOLUCIÓN

Llamamos $N(x) = x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)$ y $D(x) = bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)$ al numerador y al denominador.

Sustituyendo $x = 0$:

$$N(0) = 0 \cdot 0 + a(1 - 1) + 0 = 0, \quad D(0) = 0 + 0 - 0 = 0.$$

Aparece una indeterminación $\frac{0}{0}$, cualquiera que sea el valor de a y de b . Aplicamos la regla de L'Hôpital,

derivando numerador y denominador por separado.

$$N'(x) = [\sin(x) + x \cos(x)] + a e^x + \cos(x), \quad D'(x) = 2bx + 1 - \cos(x).$$

(en $N'(x)$ hemos derivado $x \sin(x)$ con la regla del producto, obteniendo $\sin(x) + x \cos(x)$).

Evaluamos en $x = 0$:

$$N'(0) = (0 + 0) + a(1) + 1 = a + 1, \quad D'(0) = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Idea clave

De nuevo el denominador de las derivadas se anula en $x = 0$, sea cual sea el valor de a . Si $N'(0) = a + 1$ no fuera también cero, el cociente $N'(x)/D'(x)$ tendería a $\pm\infty$ al acercarnos a $x = 0$, y el límite original no podría ser finito. Por tanto, la única posibilidad es que también se anule el numerador de las derivadas.

Imponemos $N'(0) = 0$:

$$a + 1 = 0 \implies a = -1.$$

Con $a = -1$ seguimos teniendo $\frac{0}{0}$ en $N'(x)/D'(x)$ (comprobamos: $N'(0) = D'(0) = 0$), así que aplicamos L'Hôpital una segunda vez, derivando de nuevo:

$$N''(x) = [\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)] + a e^x - \sin(x) = 2 \cos(x) - x \sin(x) - \sin(x) + a e^x,$$

$$D''(x) = 2b + \sin(x).$$

Evaluamos en $x = 0$ (con $a = -1$):

$$N''(0) = 2(1) - 0 - 0 + (-1)(1) = 2 - 1 = 1, \quad D''(0) = 2b + 0 = 2b.$$

Idea clave

Si $b \neq 0$, entonces $D''(0) = 2b \neq 0$, y ya podemos calcular el límite directamente como cociente de las segundas derivadas evaluadas en 0 (sin necesidad de derivar una tercera vez).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{N''(0)}{D''(0)} = \frac{1}{2b}.$$

Igualamos a 1 (el valor del límite dado en el enunciado):

$$\frac{1}{2b} = 1 \implies 2b = 1 \implies b = \frac{1}{2}.$$

Los valores pedidos son $a = -1$ y $b = \frac{1}{2}$.

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalquivir

es de 70 km/h.

a) [1 punto] En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?

b) [1,5 puntos] En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05 % de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

SOLUCIÓN

Apartado a)

Sea X la velocidad en este sentido, $X \sim N(64, 4)$. Buscamos $P(X \geq 72)$.

Tipificamos:

$$Z = \frac{X - 64}{4}, \quad P(X \geq 72) = P\left(Z \geq \frac{72 - 64}{4}\right) = P(Z \geq 2).$$

Idea clave

La tabla de la normal $N(0, 1)$ da directamente $P(Z \leq z)$. Para obtener $P(Z \geq z)$ usamos el complementario: $P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z)$.

Buscando en la tabla, $P(Z \leq 2) = 0,9772$. Por tanto:

$$P(Z \geq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

El porcentaje de vehículos sancionados es, aproximadamente, un 2,28 %.

Apartado b)

Sea Y la velocidad en el sentido contrario, $Y \sim N(63,6, \sigma)$, con σ desconocida. Sabemos que $P(Y > 80) = 0,0505$.

Idea clave

Aquí el problema es “inverso” al habitual: en vez de calcular una probabilidad a partir de z , tenemos la probabilidad y debemos buscar en la tabla (de dentro hacia fuera) el valor de z que la produce, para después despejar σ de la fórmula de tipificación.

Como $P(Y > 80) = 0,0505$, se tiene $P(Y \leq 80) = 1 - 0,0505 = 0,9495$. Buscamos en la tabla el valor de z tal que $P(Z \leq z) = 0,9495$: corresponde a $z = 1,64$.

Tipificamos:

$$Z = \frac{Y - 63,6}{\sigma}, \quad \frac{80 - 63,6}{\sigma} = 1,64.$$

Despejamos σ :

$$\sigma = \frac{80 - 63,6}{1,64} = \frac{16,4}{1,64} = 10.$$

La desviación típica en el sentido contrario es $\sigma = 10$ km/h.