

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Andalucía -- Ordinaria 2022

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad y Pruebas de Admisión – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Convocatoria Ordinaria. Curso 2021–2022.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.
- c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x^2}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Calcula a y b .
- b) [1,5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Como f es continua en todo su dominio (dato del enunciado), debe serlo en particular en los dos puntos donde cambia de definición, $x = -1$ y $x = 1$. Esto exige que los valores de las dos piezas que se encuentran en cada punto coincidan.

Continuidad en $x = -1$: el valor de la primera pieza es $\frac{1}{-1} = -1$; el de la segunda es $a(-1) + b = -a + b$. Igualamos:

$$-a + b = -1. \quad (1)$$

Continuidad en $x = 1$: el valor de la segunda pieza es $a(1) + b = a + b$; el de la tercera es $\frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$. Igualamos:

$$a + b = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Sumando (1) y (2): $2b = -\frac{1}{2} \implies b = -\frac{1}{4}$. Sustituyendo en (2): $a = \frac{1}{2} - b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Los valores pedidos son $a = \frac{3}{4}$ y $b = -\frac{1}{4}$.

Apartado b)

Estudiamos cada rama por separado.

Rama $x < -1$: $f(x) = \frac{1}{x}$. Cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Asíntota horizontal $y = 0$ (por la izquierda, cuando $x \rightarrow -\infty$).

Idea clave

La función $\frac{1}{x}$ tiene en principio una asíntota vertical en $x = 0$, pero ese punto no pertenece al dominio de esta rama (que solo cubre $x < -1$): no hay ninguna asíntota vertical procedente de esta pieza.

Rama $-1 \leq x < 1$: $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$. Es una recta: no tiene asíntotas.

Rama $x \geq 1$: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$. Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, dividimos:

$$x^2 = (x+1)(x-1) + 1 \implies \frac{x^2}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}.$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - (x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Asíntota oblicua $y = x - 1$ (cuando $x \rightarrow +\infty$).

Idea clave

Esta rama también tendría, en principio, una asíntota vertical en $x = -1$ (donde se anula el denominador $x + 1$), pero de nuevo ese punto queda fuera del dominio de esta pieza (que solo cubre $x \geq 1$): tampoco aparece ninguna asíntota vertical aquí. Como f es continua en todo $\mathbb{R}$ (dato del enunciado), no puede haber asíntotas verticales en ningún punto.

Resumen: la gráfica de f tiene una asíntota horizontal $y = 0$ (cuando $x \rightarrow -\infty$) y una asíntota oblicua $y = x - 1$ (cuando $x \rightarrow +\infty$). No tiene asíntotas verticales.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 4 - \frac{x^2}{3}$ y $g(x) = \frac{x^2}{6} - 2$.

SOLUCIÓN**Idea clave**

Como f es una parábola invertida y g es una parábola con la misma orientación que una taza, y ambas son funciones pares (simétricas respecto al eje Y), el rectángulo de área máxima también será simétrico respecto al eje Y : sus vértices estarán en $(\pm x, f(x))$ arriba y $(\pm x, g(x))$ abajo, para cierto $x > 0$.

Hallamos primero dónde se cortan f y g (los límites del dominio válido para x):

$$4 - \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{6} - 2 \implies 6 = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{6} = \frac{x^2}{2} \implies x^2 = 12 \implies x = 2\sqrt{3} \ (x > 0).$$

La anchura del rectángulo es $2x$, y su altura es $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = \left(4 - \frac{x^2}{3}\right) - \left(\frac{x^2}{6} - 2\right) = 6 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{6} = 6 - \frac{x^2}{2}.$$

El área del rectángulo en función de x es:

$$A(x) = 2x \left(6 - \frac{x^2}{2}\right) = 12x - x^3, \quad 0 < x < 2\sqrt{3}.$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = 2 \ (x > 0).$$

Comprobamos que es un máximo con la segunda derivada:

$$A''(x) = -6x, \quad A''(2) = -12 < 0.$$

Como $A''(2) < 0$, se trata efectivamente de un máximo.

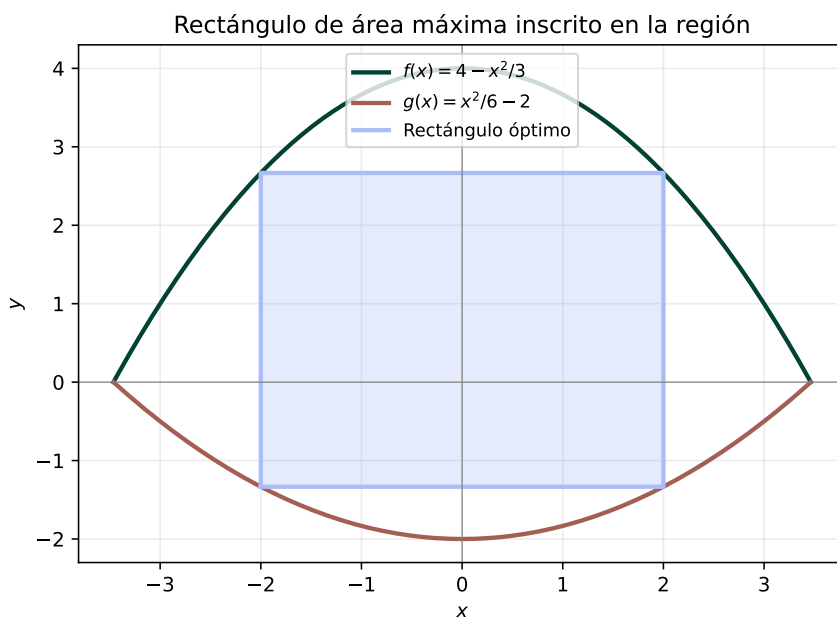
Calculamos las dimensiones:

$$\text{Anchura} = 2x = 4, \quad \text{Altura} = f(2) - g(2) = \left(4 - \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{4}{6} - 2\right) = \frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{3} = 4.$$

Idea clave

Curiosamente, el rectángulo óptimo resulta ser un cuadrado de lado 4.

Las dimensiones del rectángulo de área máxima son 4×4 (un cuadrado), con área $A(2) = 12(2) - 2^3 = 24 - 8 = 16 \text{ u}^2$.



EJERCICIO 3 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 0 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) [1 punto] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función.
- b) [1,5 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y por el eje de abscisas.

SOLUCIÓN

Apartado a)

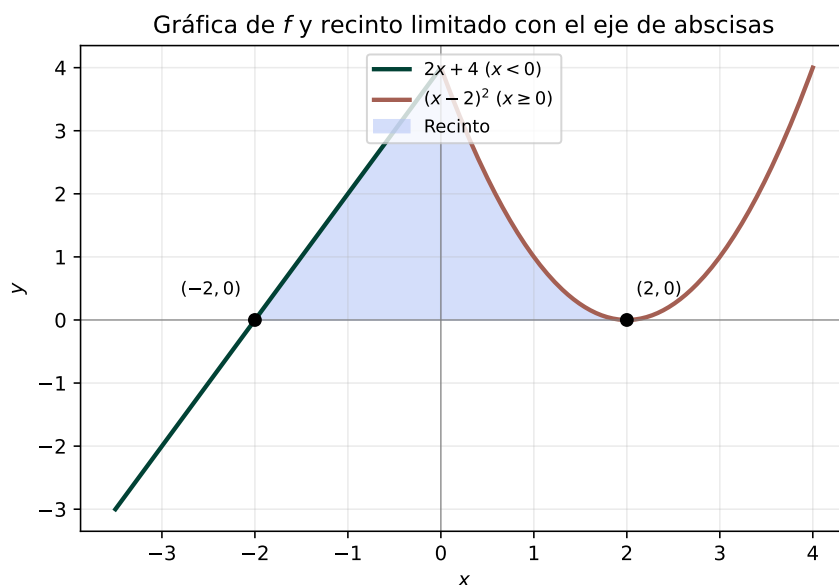
Buscamos los puntos de corte en cada rama por separado.

Rama $x < 0$: $2x + 4 = 0 \implies x = -2$ (válido, pues $-2 < 0$).

Rama $x \geq 0$: $(x - 2)^2 = 0 \implies x = 2$ (válido, pues $2 \geq 0$).

Los puntos de corte con el eje de abscisas son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Comprobamos la continuidad en $x = 0$: rama izquierda, $f(0^-) = 2(0) + 4 = 4$; rama derecha, $f(0) = (0 - 2)^2 = 4$. Coinciden, la función es continua.



Apartado b)

Idea clave

Antes de integrar, conviene identificar dónde f es positiva o negativa. Para $x < -2$, $f(x) = 2x + 4 < 0$ (por ejemplo $f(-3) = -2$); esta parte no forma un recinto acotado (se extiende hasta $-\infty$), así que no se incluye. Para $-2 \leq x \leq 2$, comprobamos que $f(x) \geq 0$ en todo el tramo: en $[-2, 0)$, $f(x) = 2x + 4 \geq 0$; en $[0, 2]$, $f(x) = (x - 2)^2 \geq 0$ (un cuadrado nunca es negativo). Para $x > 2$, $f(x) = (x - 2)^2 > 0$ de nuevo, pero esta rama tampoco forma un recinto acotado con el eje (se extiende hasta $+\infty$). Por tanto, el único recinto limitado (cerrado) es el comprendido entre $x = -2$ y $x = 2$.

Calculamos el área integrando f en $[-2, 2]$ (ya que $f \geq 0$ en todo este tramo), separando en las dos ramas:

$$\text{Área} = \int_{-2}^0 (2x + 4) dx + \int_0^2 (x - 2)^2 dx.$$

Calculamos la primera integral:

$$\int_{-2}^0 (2x + 4) dx = \left[x^2 + 4x \right]_{-2}^0 = (0) - (4 - 8) = 0 - (-4) = 4.$$

Calculamos la segunda integral:

$$\int_0^2 (x - 2)^2 dx = \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{0}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = 0 - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

Sumamos:

$$\text{Área} = 4 + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}.$$

El área del recinto es $\frac{20}{3} \text{ u}^2 \approx 6,67 \text{ u}^2$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$ para $x \neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2, 6)$.

SOLUCIÓN

Idea clave

El denominador $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ es un cuadrado perfecto. Como el grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (2), primero dividimos los polinomios.

Dividimos x^3 entre $x^2 - 2x + 1$:

$$x^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 1) + (3x - 2),$$

de donde:

$$f(x) = x + 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}.$$

Descomponemos la fracción propia en fracciones simples (con denominador repetido):

$$\frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2}.$$

Multiplicando por $(x - 1)^2$:

$$3x - 2 = A(x - 1) + B.$$

Evaluando en $x = 1$: $3 - 2 = 1 = B$. Comparando el coeficiente de x : $3 = A$.

Por tanto:

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Integramos término a término:

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C.$$

Idea clave

El último término se integra recordando que $\int \frac{1}{(x - 1)^2} dx = \int (x - 1)^{-2} dx = -\frac{1}{x - 1} + C$ (regla de la potencia, con exponente -2).

Imponemos que la gráfica pase por (2, 6):

$$F(2) = \frac{4}{2} + 2(2) + 3 \ln |1| - \frac{1}{1} + C = 2 + 4 + 0 - 1 + C = 5 + C.$$

Iguamos a 6: $C = 1$.

La primitiva pedida es $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + 1$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

- a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de m .
 b) [0,75 puntos] Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Antes de desarrollar el determinante en general, observamos que la primera y la tercera fila comparten la misma tercera componente (m): esto sugiere restar filas para simplificar el cálculo.

Restamos la primera fila a la tercera ($F_3 \rightarrow F_3 - F_1$), lo que no cambia el determinante:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollamos por la tercera fila (que solo tiene un elemento no nulo):

$$\det(A) = -(-3) \begin{vmatrix} 1 & m \\ -m & -1 \end{vmatrix} = 3[1(-1) - m(-m)] = 3(m^2 - 1).$$

Iguamos a cero: $3(m^2 - 1) = 0 \implies m = 1$ o $m = -1$.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$: $\det(A) \neq 0$, el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Caso $m = 1$: el sistema queda

$$\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -x + 3y - z = 1 \\ x - 4y + z = -6 \end{cases}$$

Sumamos la 1.^a y la 2.^a ecuación (para eliminar x):

$$(x - y + z) + (-x + 3y - z) = -3 + 1 \implies 2y = -2 \implies y = -1.$$

Restamos la 1.^a ecuación de la 3.^a (para eliminar x también):

$$(x - 4y + z) - (x - y + z) = -6 - (-3) \implies -3y = -3 \implies y = 1.$$

Idea clave

¡Aquí aparece una inconsistencia! La primera combinación da $y = -1$ y la segunda da $y = 1$: ambas relaciones deben cumplirse simultáneamente, lo cual es imposible.

Como estas dos condiciones sobre y son incompatibles entre sí, el sistema no tiene solución para $m = 1$: es **incompatible (SI)**.

Caso $m = -1$: el sistema queda

$$\begin{cases} x - y - z = -3 \\ x + 3y - z = 1 \\ x - 4y - z = -6 \end{cases}$$

Restamos la 1.^a ecuación de la 2.^a:

$$(x + 3y - z) - (x - y - z) = 1 - (-3) \implies 4y = 4 \implies y = 1.$$

Restamos la 1.^a ecuación de la 3.^a:

$$(x - 4y - z) - (x - y - z) = -6 - (-3) \implies -3y = -3 \implies y = 1.$$

Idea clave

A diferencia del caso $m = 1$, aquí ambas combinaciones dan la misma condición ($y = 1$): son compatibles entre sí, y el sistema queda con una ecuación redundante, es decir, con solo dos ecuaciones independientes para tres incógnitas.

Con $y = 1$, sustituyendo en la 1.^a ecuación: $x - 1 - z = -3 \implies x - z = -2 \implies x = z - 2$, que tiene infinitas soluciones (una por cada valor de z). El sistema es, por tanto, **compatible indeterminado (SCI)**.

Valor de m	Tipo de sistema
$m \neq 1, m \neq -1$	Compatible determinado (SCD)
$m = 1$	Incompatible (SI)
$m = -1$	Compatible indeterminado (SCI)

Apartado b)

Para $m = 2$ (compatible determinado), el sistema es:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 3y - z = 1 \\ x - 4y + 2z = -6 \end{cases}$$

Restamos la 1.^a ecuación de la 3.^a:

$$(x - 4y + 2z) - (x - y + 2z) = -6 - (-3) \implies -3y = -3 \implies y = 1.$$

Sustituimos $y = 1$ en la 1.^a ecuación:

$$x - 1 + 2z = -3 \implies x + 2z = -2 \implies x = -2 - 2z.$$

Sustituimos $y = 1$ y $x = -2 - 2z$ en la 2.^a ecuación:

$$-2(-2 - 2z) + 3(1) - z = 1 \implies 4 + 4z + 3 - z = 1 \implies 3z = 1 - 7 = -6 \implies z = -2.$$

Entonces:

$$x = -2 - 2(-2) = -2 + 4 = 2.$$

Comprobación: $2 - 1 + 2(-2) = 2 - 1 - 4 = -3$ ✓; $-2(2) + 3(1) - (-2) = -4 + 3 + 2 = 1$ ✓; $2 - 4(1) + 2(-2) = 2 - 4 - 4 = -6$ ✓.

La solución para $m = 2$ es $(x, y, z) = (2, 1, -2)$.

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) [1 punto] ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A ?

b) [1,5 puntos] Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera fila:

$$|A| = m \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} - \sqrt{m} \begin{vmatrix} \sqrt{m} & 1 \\ \sqrt{m} & m \end{vmatrix} + \sqrt{m} \begin{vmatrix} \sqrt{m} & m \\ \sqrt{m} & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada menor:

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1, \quad \begin{vmatrix} \sqrt{m} & 1 \\ \sqrt{m} & m \end{vmatrix} = m\sqrt{m} - \sqrt{m}, \quad \begin{vmatrix} \sqrt{m} & m \\ \sqrt{m} & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{m} - m\sqrt{m}.$$

Sustituyendo:

$$|A| = m(m^2 - 1) - \sqrt{m}(m\sqrt{m} - \sqrt{m}) + \sqrt{m}(\sqrt{m} - m\sqrt{m}).$$

Idea clave

Los términos con $\sqrt{m}$ multiplicados entre sí dan lugar a m (ya que $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = m$), así que toda la expresión final queda en función solo de m , sin raíces sueltas.

Simplificamos: $\sqrt{m}(m\sqrt{m} - \sqrt{m}) = m^2 - m$; $\sqrt{m}(\sqrt{m} - m\sqrt{m}) = m - m^2$.

$$|A| = m(m^2 - 1) - (m^2 - m) + (m - m^2) = m^3 - m - m^2 + m + m - m^2 = m^3 - 2m^2 + m.$$

Factorizamos:

$$|A| = m(m^2 - 2m + 1) = m(m - 1)^2.$$

Igualamos a cero: $m = 0$ o $m = 1$.

A tiene inversa para todo $m \geq 0$ excepto $m = 0$ y $m = 1$ (es decir, para $m > 0$, $m \neq 1$).

Apartado b)

Para $m = 4$: $\sqrt{4} = 2$, así que:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad |A| = 4(4 - 1)^2 = 4 \cdot 9 = 36.$$

Despejamos X :

$$AX = 12I \implies X = 12A^{-1}.$$

Calculamos A^{-1} mediante la matriz adjunta. Los 9 cofactores:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12.$$

La matriz de cofactores (que en este caso resulta simétrica) es:

$$C = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = C^t = \text{adj}(A).$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos por 12:

$$X = 12A^{-1} = \frac{12}{36} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

a) [0,75 puntos] Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) [1,75 puntos] Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Imponemos $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$ y $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (1)(-1) + a(2) + b(3) = -1 + 2a + 3b = 0. \quad (1)$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (1)(2) + a(0) + b(-1) = 2 - b = 0 \implies b = 2. \quad (2)$$

Sustituyendo $b = 2$ en (1): $-1 + 2a + 6 = 0 \implies 2a = -5 \implies a = -\frac{5}{2}.$

Los valores pedidos son $a = -\frac{5}{2}$ y $b = 2$.

Apartado b)

Idea clave

En un paralelogramo con un vértice en el origen O y lados con direcciones $\vec{u}$ y $\vec{v}$, los cuatro vértices son O , $k\vec{u}$, $l\vec{v}$ y $k\vec{u} + l\vec{v}$, para ciertos escalares k, l (los lados tienen longitud $|k|\|\vec{u}\|$ y $|l|\|\vec{v}\|$). Como se pide que $\overrightarrow{OA}$ sea una diagonal, el vértice opuesto a O debe ser exactamente el punto A , es decir, $k\vec{u} + l\vec{v} = A$.

Planteamos la ecuación vectorial $k\vec{u} + l\vec{v} = \overrightarrow{OA} = (-4, 4, 7)$:

$$k(-1, 2, 3) + l(2, 0, -1) = (-4, 4, 7) \implies \begin{cases} -k + 2l = -4 \\ 2k = 4 \\ 3k - l = 7 \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $k = 2$. Sustituyendo en la tercera: $3(2) - l = 7 \implies l = -1$.

Comprobamos con la primera ecuación: $-2 + 2(-1) = -2 - 2 = -4$ ✓.

Idea clave

Con $k = 2$ y $l = -1$, los cuatro vértices del paralelogramo son: O , $2\vec{u}$, $-\vec{v}$, y su vértice opuesto a O , que debe ser $2\vec{u} + (-1)\vec{v} = A$.

Calculamos los cuatro vértices:

$$O = (0, 0, 0), \quad 2\vec{u} = (-2, 4, 6), \quad -\vec{v} = (-2, 0, 1), \quad A = (-4, 4, 7).$$

Comprobamos que forman un paralelogramo válido: el lado de O a $2\vec{u}$ es paralelo (y de la misma longitud) al lado de $-\vec{v}$ a A : $A - (-\vec{v}) = (-4 - (-2), 4 - 0, 7 - 1) = (-2, 4, 6) = 2\vec{u}$. Análogamente, el lado de O a $-\vec{v}$ es paralelo al de $2\vec{u}$ a A : $A - 2\vec{u} = (-4 - (-2), 4 - 4, 7 - 6) = (-2, 0, 1) = -\vec{v}$.

Los cuatro vértices del paralelogramo son: $O(0, 0, 0)$, $(-2, 4, 6)$, $(-4, 4, 7) = A$ y $(-2, 0, 1)$.

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera la recta $r \equiv x - 2 = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{2}$, así como la recta s determinada por el punto $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{v} = (1 + a, -a, 3a)$.

- a) [1,5 puntos] Calcula a para que las rectas r y s se corten.
- b) [1 punto] Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares.

SOLUCIÓN

La recta r pasa por $P_0 = (2, 0, 1)$ con dirección $\vec{d}_r = (1, -1, 2)$. La recta s pasa por $P = (1, 2, 3)$ con dirección $\vec{d}_s = (1 + a, -a, 3a)$.

Apartado a)

Idea clave

Para que dos rectas se corten, debe existir una solución común a las dos parametrizaciones. Usamos parámetros distintos (t para r , μ para s) e igualamos coordenada a coordenada, obteniendo un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (t , μ y a).

Igualamos:

$$(2 + t, -t, 1 + 2t) = (1 + \mu(1 + a), 2 - \mu a, 3 + 3\mu a).$$

Esto da el sistema:

$$\begin{cases} 2 + t = 1 + \mu(1 + a) \\ -t = 2 - \mu a \\ 1 + 2t = 3 + 3\mu a \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $t = \mu a - 2$.

Sustituimos en la tercera: $1 + 2(\mu a - 2) = 3 + 3\mu a \implies 1 + 2\mu a - 4 = 3 + 3\mu a \implies -\mu a = 6 \implies \mu a = -6$.

Sustituimos $t = \mu a - 2 = -6 - 2 = -8$ en la primera ecuación:

$$2 + (-8) = 1 + \mu(1 + a) \implies -6 = 1 + \mu + \mu a \implies \mu + \mu a = -7.$$

Como $\mu a = -6$: $\mu - 6 = -7 \implies \mu = -1$.

Y como $\mu a = -6$ con $\mu = -1$: $-a = -6 \implies a = 6$.

Comprobación: con $a = 6$, $\vec{d}_s = (7, -6, 18)$; con $\mu = -1$, $t = -8$: punto en r : $(2 - 8, 8, 1 - 16) = (-6, 8, -15)$; punto en s : $(1 - 7, 2 + 6, 3 - 18) = (-6, 8, -15) \checkmark$, coinciden.

El valor pedido es $a = 6$.

Apartado b)

Idea clave

Dos rectas son perpendiculares cuando sus vectores directores lo son, es decir, cuando su producto escalar es cero.

$$\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = (1)(1 + a) + (-1)(-a) + (2)(3a) = 1 + a + a + 6a = 1 + 8a.$$

Igualamos a cero:

$$1 + 8a = 0 \implies a = -\frac{1}{8}.$$

El valor pedido es $a = -\frac{1}{8}$.