

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Ordinaria 2024

Matemáticas II

Serie 1

Baremo e instrucciones

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Idea clave

Este examen (Catalunya, 2024, Serie 1) tiene un formato distinto al resto de exámenes de esta comunidad ya trabajados: aquí se responden 4 de las 6 cuestiones propuestas, no 4 ejercicios obligatorios más una opción A/B. Aquí resolvemos las 6 cuestiones completas, como recurso de repaso íntegro.

PREGUNTA 1: Función logarítmica: extremos, asíntotas y recta tangente (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considere la función $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$, definida para $x > 0$.

- a (1 punto) Estudie sus máximos y mínimos, y las zonas de crecimiento y de decrecimiento.
- b (1 punto) ¿Esta función tiene asíntotas? Haga un esbozo de su gráfica.
- c (0,5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Con un cociente de funciones, la regla del cociente es el camino directo para la derivada; conviene simplificar el resultado antes de estudiar su signo.

Derivamos con la regla del cociente ($u = 2 \ln x$, $v = x$, $u' = 2/x$):

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - 2 \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}.$$

Como $x^2 > 0$ siempre (dominio $x > 0$), el signo de $f'(x)$ depende solo de $1 - \ln x$.

Igualando a cero: $1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$.

Para $x < e$: $\ln x < 1 \Rightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (f creciente).

Para $x > e$: $\ln x > 1 \Rightarrow 1 - \ln x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (f decreciente).

f es creciente en $(0, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$.

Como pasa de creciente a decreciente, hay un **máximo relativo** en $x = e$, con valor $f(e) = 2 \frac{\ln e}{e} = \frac{2}{e}$. No hay ningún mínimo relativo (el dominio es $(0, +\infty)$ y f solo cambia de sentido una vez).

Máximo en $\left(e, \frac{2}{e}\right)$, sin mínimos relativos.

Apartado b)

Idea clave

Para las asíntotas de una función definida en $(0, +\infty)$, hay que mirar el comportamiento en los dos extremos del dominio: cuando $x \rightarrow 0^+$ (el único punto “conflictivo”, ya que ahí termina el dominio) y cuando $x \rightarrow +\infty$.

Cuando $x \rightarrow 0^+$: $\ln x \rightarrow -\infty$, y al dividir entre $x \rightarrow 0^+$ (positivo y pequeño), $f(x) \rightarrow -\infty$. Hay **asíntota vertical** en $x = 0$.

Cuando $x \rightarrow +\infty$: $\ln x$ crece mucho más lentamente que x , así que $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, y por tanto $f(x) \rightarrow 0$. Hay **asíntota horizontal** $y = 0$ (no hace falta buscar asíntota oblicua, ya que existe horizontal).

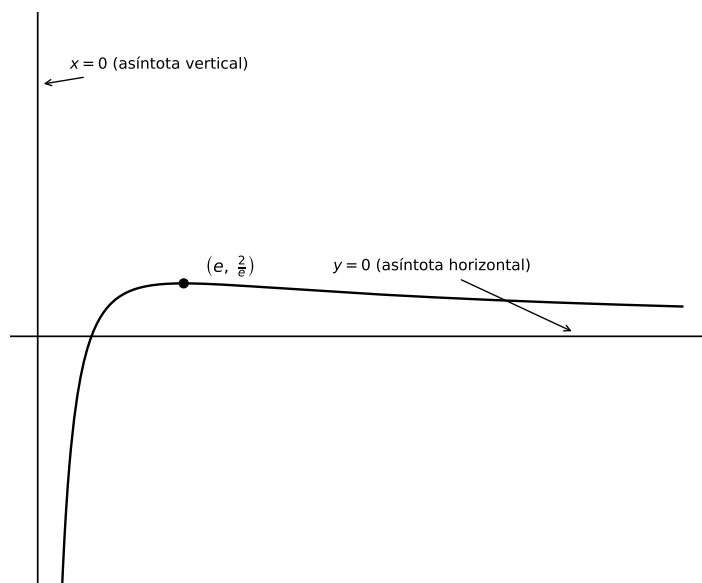


Figura 1: Esbozo de $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$: asíntota vertical en $x = 0$, máximo en $(e, \frac{2}{e})$ y asíntota horizontal $y = 0$.

Apartado c)

En $x = 1$: $f(1) = 2 \frac{\ln 1}{1} = 2 \cdot \frac{0}{1} = 0$, y $f'(1) = \frac{2(1 - \ln 1)}{1^2} = 2(1 - 0) = 2$.

La recta tangente es:

$$y - 0 = 2(x - 1) \implies \boxed{y = 2x - 2.}$$

PREGUNTA 2: Sistema de ecuaciones lineales con parámetro (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\},$$

donde k es un parámetro real.

a (1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k , y resuélvalo para $k = 0$.

b (0,75 puntos) Resuelva el sistema para $k = -1$.

c (0,75 puntos) Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema se vuelva incompatible. Justifique la respuesta.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por la tercera fila:

$$|M| = 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 0.$$

Calculamos los determinantes 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k \end{vmatrix} = 2k - 1, \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 4k + 1.$$

Sustituyendo:

$$|M| = 3(2k - 1) - 3(4k + 1) = 6k - 3 - 12k - 3 = -6k - 6 = -6(k + 1).$$

El determinante se anula únicamente en $k = -1$.

Idea clave

Al tratarse de un sistema cuadrado, el determinante resuelve directamente todos los casos salvo el que lo anula: solo hace falta un análisis de rangos aparte para $k = -1$.

Caso $k \neq -1$: $|M| \neq 0$, luego $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 3 = n$. **Sistema compatible determinado (SCD).**

Caso $k = -1$: se comprueba que $\text{rg}(M) = 2$ (el menor de filas 1,2 y columnas 1,2, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$), y que la tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos (en concreto, $\text{fila}_3 = \text{fila}_1 - \text{fila}_2$, y esa misma combinación reproduce también el término independiente: $4 - 3 = 1$, que coincide con el de la tercera ecuación). Por tanto $\text{rg}(M') = 2 = \text{rg}(M) < 3$: **sistema compatible indeterminado (SCI).**

Resumen:

k	Tipo de sistema
$k \neq -1$	SCD
$k = -1$	SCI

Resolvemos para $k = 0$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

Idea clave

De la segunda ecuación, sin z , y la tercera, también sin z , obtenemos directamente x e y ; la primera ecuación entonces solo sirve para despejar z .

De la segunda: $x = y + 3$. Sustituyendo en la tercera: $3(y + 3) + 3y = 1 \Rightarrow 3y + 9 + 3y = 1 \Rightarrow 6y = -8 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$. Entonces $x = -\frac{4}{3} + 3 = \frac{5}{3}$.

Sustituyendo en la primera: $4\left(\frac{5}{3}\right) + 2\left(-\frac{4}{3}\right) - z = 4 \Rightarrow \frac{20}{3} - \frac{8}{3} - z = 4 \Rightarrow \frac{12}{3} - z = 4 \Rightarrow 4 - z = 4 \Rightarrow z = 0$.

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right).$$

Apartado b)

Para $k = -1$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

Idea clave

Como ya sabemos (apartado a) que este sistema es compatible indeterminado, con la tercera ecuación combinación de las otras dos, basta trabajar con dos de las tres ecuaciones y dejar una variable como parámetro libre.

De la tercera ecuación: $x = \frac{1-3y}{3} = \frac{1}{3} - y$. Sustituyendo en la segunda: $\frac{1}{3} - y - y - z = 3 \Rightarrow -2y - z = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow z = -2y - \frac{8}{3}$.

Tomando $y = \lambda$ como parámetro:

$$x = \frac{1}{3} - \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = -2\lambda - \frac{8}{3}.$$

Idea clave

Comprobamos con la primera ecuación (la que no hemos usado para despejar), para verificar que no depende realmente de λ y que no hay errores de cálculo.

Comprobación con la primera ecuación: $4\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) + 2\lambda - \left(-2\lambda - \frac{8}{3}\right) = \frac{4}{3} - 4\lambda + 2\lambda + 2\lambda + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$
 $\square$ (se cumple para cualquier λ , como debe ser).

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3} - \lambda, \lambda, -2\lambda - \frac{8}{3}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Apartado c)

Idea clave

Ya vimos en el apartado a) que, para $k = -1$, la tercera ecuación es exactamente la combinación (fila 1) - (fila 2), y que esa misma combinación aplicada a los términos independientes da $4 - 3 = 1$, que coincide con el término independiente actual de la tercera ecuación. Basta con cambiar ese término independiente por cualquier otro valor para romper la compatibilidad, sin tocar los coeficientes de x e y (así se mantiene $\text{rg}(M) = 2$, pero $\text{rg}(M')$ pasa a ser 3).

Cambiamos la tercera ecuación por, por ejemplo, $3x + 3y = 2$ (cualquier término independiente distinto

de 1 funciona). El sistema queda:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$$

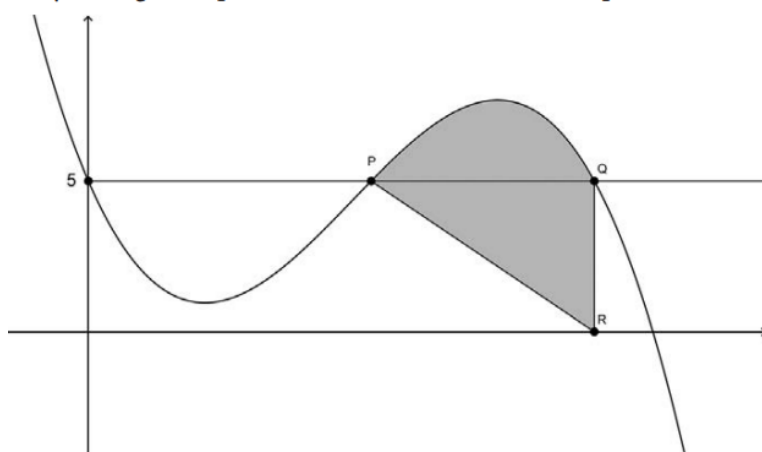
Los coeficientes de x, y, z no han cambiado, así que $\text{rg}(M) = 2$ sigue igual. Pero ahora, la combinación (fila 1) – (fila 2) de los términos independientes sigue dando $4 - 3 = 1$, que ya **no coincide** con el nuevo término independiente de la tercera ecuación (2). Esto produce una fila de ceros igualada a un valor no nulo al escalar, es decir, $\text{rg}(M') = 3 \neq \text{rg}(M) = 2$.

Con $3x + 3y = 2$ (en vez de $= 1$), el sistema resulta incompatible.

PREGUNTA 3: Terreno de regadío: puntos sobre una cúbica y área (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Juan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a (1,25 puntos) A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P , Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR .

b (1,25 puntos) Calcule la superficie del terreno.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

P y Q están, según la figura, sobre la recta horizontal $y = 5$: son las intersecciones de la curva con esa recta. R está justo debajo de Q , sobre el eje OX : es el pie de la perpendicular desde Q al eje X , es decir, tiene la misma abscisa que Q y ordenada 0.

Buscamos las intersecciones de $f(x)$ con $y = 5$:

$$-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \implies -x^3 + 7x^2 - 6x = 0 \implies -x(x^2 - 7x + 6) = 0.$$

Las soluciones son $x = 0$ y las raíces de $x^2 - 7x + 6 = 0$: $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$, es decir, $x = 6$ o $x = 1$.

Las tres soluciones son $x = 0, 1, 6$. Según la figura, la curva pasa por $(0, 5)$ al principio, baja a un mínimo relativo, vuelve a subir hasta cruzar $y = 5$ en P (con abscisa menor), sube hasta un máximo relativo y vuelve a bajar hasta cruzar $y = 5$ en Q (con abscisa mayor). Por tanto:

$$P = (1, 5), \quad Q = (6, 5).$$

El punto R está en el eje OX , verticalmente debajo de Q :

$$R = (6, 0).$$

La recta PR pasa por $P(1, 5)$ y $R(6, 0)$, con pendiente $\frac{0 - 5}{6 - 1} = -1$:

$$y - 5 = -1(x - 1) \implies y = -x + 6.$$

Apartado b)

Idea clave

La región sombreada está delimitada arriba por la curva (de P a Q), a la derecha por el segmento vertical QR , y abajo-izquierda por el segmento RP . Se puede calcular como el área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = 6$ (hasta el eje X), menos el área bajo la recta PR en ese mismo tramo (el triángulo que queda “de más” entre la recta y el eje X , que no forma parte de la región pedida).

Calculamos primero el área bajo la curva entre $x = 1$ y $x = 6$:

$$\int_1^6 f(x) dx = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - 3x^2 + 5x \right]_1^6.$$

$$\text{En } x = 6: -\frac{1296}{4} + \frac{7 \cdot 216}{3} - 3(36) + 5(6) = -324 + 504 - 108 + 30 = 102.$$

$$\text{En } x = 1: -\frac{1}{4} + \frac{7}{3} - 3 + 5 = \frac{-3 + 28 - 36 + 60}{12} = \frac{49}{12}.$$

$$\int_1^6 f(x) dx = 102 - \frac{49}{12} = \frac{1224 - 49}{12} = \frac{1175}{12}.$$

Ahora el área bajo la recta PR (que coincide con el área de un triángulo de base 5 y altura 5, ya que en $x = 1$ la recta vale 5 y en $x = 6$ vale 0):

$$\int_1^6 (-x + 6) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x \right]_1^6 = (-18 + 36) - \left(-\frac{1}{2} + 6 \right) = 18 - \frac{11}{2} = \frac{25}{2}.$$

Idea clave

Esta segunda integral también se puede obtener directamente como área de un triángulo rectángulo (base $6 - 1 = 5$, altura 5): $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$, coincidiendo con el cálculo por integral.

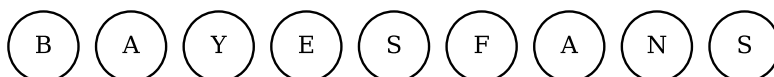
La superficie del terreno es la diferencia:

$$\text{Superficie} = \frac{1175}{12} - \frac{25}{2} = \frac{1175}{12} - \frac{150}{12} = \frac{1025}{12}.$$

$$\text{Superficie} = \frac{1025}{12} \text{ u}^2 \approx 85,42 \text{ u}^2.$$

PREGUNTA 4: Probabilidad: extracciones de bolas con letras (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.



a (1,25 puntos) A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una detrás de la otra y sin reemplazamiento (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda).

- Calcule la probabilidad de que la primera bola sea una A o una E. [0,5 puntos]
- Calcule la probabilidad de que las dos bolas sean diferentes. [0,75 puntos]

b (1,25 puntos) Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de la otra, pero ahora con reemplazamiento (es decir, ahora sí devuelve a la bolsa cada bola extraída antes de coger la siguiente).

- Calcule la probabilidad de que no haya sacado ninguna A. [0,5 puntos]
- Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A. [0,75 puntos]

SOLUCIÓN**Idea clave**

Antes de calcular nada, conviene contar bien las letras repetidas: de las 9 bolas, hay 2 con la letra A, 2 con la letra S, y una sola de cada una de las demás (B, Y, E, F, N).

Apartado a), primera parte

Como hay 2 bolas con A y 1 con E, de un total de 9:

$$P(\text{primera es A o E}) = \frac{2+1}{9} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Apartado a), segunda parte

Idea clave

Es más rápido calcular la probabilidad del suceso complementario, “las dos bolas son iguales” (misma letra), que solo puede ocurrir con las letras repetidas (A o S), y restar de 1.

Solo puede haber dos bolas iguales si ambas son A (hay 2 A de 9) o ambas son S (hay 2 S de 9), extrayendo sin reemplazamiento:

$$P(\text{ambas A}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{72}, \quad P(\text{ambas S}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{72}.$$

$$P(\text{mismas letras}) = \frac{2}{72} + \frac{2}{72} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}.$$

$$P(\text{diferentes}) = 1 - \frac{1}{18} = \boxed{\frac{17}{18} \approx 0,944}.$$

Apartado b), primera parte

Idea clave

Con reemplazamiento, cada extracción es independiente y siempre con la misma composición de la bolsa (9 bolas, 2 de ellas A). El número de A obtenidas en 5 extracciones sigue una distribución binomial.

Sea X el número de bolas con A obtenidas en las 5 extracciones, con $X \sim B\left(5, \frac{2}{9}\right)$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{7}{9}\right)^5 = \frac{16807}{59049} \approx 0,2846.$$

$$\boxed{P(\text{ninguna A}) = \left(\frac{7}{9}\right)^5 \approx 0,285}.$$

Apartado b), segunda parte

Idea clave

“Al menos dos” es el complementario de “ninguna o exactamente una”; con solo 5 extracciones, calcular estos dos casos y restar de 1 es más rápido que sumar las probabilidades de 2, 3, 4 y 5 A.

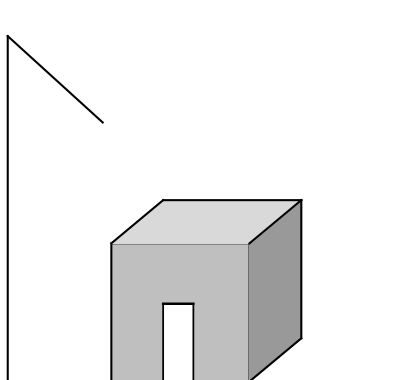
$$P(X = 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right)^1 \left(\frac{7}{9}\right)^4 = 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2401}{6561} = \frac{24010}{59049} \approx 0,4066.$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{16807}{59049} - \frac{24010}{59049} = \frac{59049 - 16807 - 24010}{59049} = \frac{18232}{59049}.$$

$$P(\text{al menos dos A}) = \frac{18232}{59049} \approx 0,309.$$

PREGUNTA 5: Optimización: coste de construcción de un cobertizo (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Queremos construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hace falta construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, queremos que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadirle una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



a (1,25 puntos) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35,$$

donde x es la profundidad del cobertizo en metros.

b (1,25 puntos) Calcule cuáles deben ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste?

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Con la profundidad x y la anchura $3x$ (el triple), la condición de volumen fija la altura en función de x ; sustituyendo esa altura en las áreas de paredes y techo se obtiene el coste total.

Sea x la profundidad, $3x$ la anchura, y h la altura del cobertizo. El volumen es:

$$V = 3x \cdot x \cdot h = 3x^2h = 6 \implies h = \frac{6}{3x^2} = \frac{2}{x^2}.$$

Las tres paredes a construir son: la pared frontal (dimensiones anchura $\times$ altura $= 3x \cdot h$) y las dos paredes laterales (dimensiones profundidad $\times$ altura $= x \cdot h$ cada una). El techo tiene dimensiones anchura $\times$ profundidad $= 3x \cdot x = 3x^2$.

$$\text{Área de paredes} = 3xh + 2(xh) = 5xh, \quad \text{Área de techo} = 3x^2.$$

El coste total es:

$$C(x) = 30(5xh) + 50(3x^2) + 35 = 150xh + 150x^2 + 35.$$

Sustituyendo $h = \frac{2}{x^2}$:

$$150xh = 150x \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{300}{x}.$$

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35,$$

que es precisamente la expresión que había que comprobar.

Apartado b)

Derivamos:

$$C'(x) = -\frac{300}{x^2} + 300x = 300 \left(x - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{300(x^3 - 1)}{x^2}.$$

Idea clave

El denominador x^2 nunca se anula para $x > 0$, así que los puntos críticos vienen solo del numerador.

Igualando a cero: $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (única raíz real positiva).

$$C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300,$$

que es siempre positiva para $x > 0$: el punto crítico $x = 1$ es un **mínimo**.

Con $x = 1$: profundidad = 1 m, anchura = $3(1) = 3$ m, altura $h = \frac{2}{1^2} = 2$ m.

Profundidad = 1 m, anchura = 3 m, altura = 2 m.

El coste mínimo es:

$$C(1) = \frac{300}{1} + 150(1)^2 + 35 = 300 + 150 + 35 = 485.$$

Coste mínimo = 485 €.

PREGUNTA 6: Geometría del espacio: plano mediador y triángulo isósceles (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.

a (1 punto) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$.

b (0,75 puntos) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta.

c (0,75 puntos) Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área.

SOLUCIÓN

Apartado a)

El punto medio de A y B es:

$$M = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = (-1, 0, 3).$$

Idea clave

Un plano perpendicular a la recta AB tiene, como vector normal, precisamente la dirección de esa recta: $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -4, 0).$$

El plano π , con normal $\overrightarrow{AB} = (-4, -4, 0)$ y que pasa por $M(-1, 0, 3)$:

$$-4(x+1) - 4(y-0) + 0(z-3) = 0 \implies -4x - 4 - 4y = 0,$$

que, dividiendo por -4 , queda:

$$\pi : x + y + 1 = 0.$$

Idea clave

Para justificar que π es exactamente el conjunto de puntos equidistantes de A y B , conviene partir de la condición $d(P, A) = d(P, B)$ y desarrollarla algebraicamente, viendo que se llega precisamente a la ecuación de π .

Justificación: sea $P = (x, y, z)$ un punto cualquiera. La condición $d(P, A) = d(P, B)$ equivale a $d(P, A)^2 = d(P, B)^2$ (ambas distancias son no negativas), es decir:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2.$$

Los términos en $(z-3)^2$ se cancelan. Desarrollando el resto:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4.$$

Simplificando (los términos x^2 e y^2 se cancelan):

$$-2x + 1 - 4y + 4 = 6x + 9 + 4y + 4 \implies -2x - 4y + 5 = 6x + 4y + 13,$$

$$\implies -8x - 8y - 8 = 0 \implies x + y + 1 = 0,$$

que es exactamente la ecuación de π obtenida antes. Por tanto, π está formado precisamente por los puntos equidistantes de A y B . ■

Apartado b)

$$d(A, \pi) = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$d(B, \pi) = \frac{|-3 - 2 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$d(A, \pi) = d(B, \pi) = 2\sqrt{2}.$$

Idea clave

Esta igualdad no es casualidad: es consecuencia directa de lo demostrado en el apartado a). El plano π es, por construcción, el plano mediador (perpendicular bisector) del segmento AB , así que *todos* sus puntos —y en particular la simetría que intercambia A y B mediante una reflexión respecto a π — garantizan que A y B quedan siempre a la misma distancia de π .

No es casualidad: π es el plano mediador de AB .

Apartado c)

Idea clave

Para ver si un triángulo es isósceles, basta comparar las longitudes de sus tres lados usando la fórmula de la distancia entre dos puntos.

$$AB = \|B - A\| = \|(-4, -4, 0)\| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

$$AC = \|C - A\| = \|(-8, 4, 0)\| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

$$BC = \|C - B\| = \|(-4, 8, 0)\| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Como $AC = BC = 4\sqrt{5}$ (y $AB = 4\sqrt{2}$ es distinto), el triángulo tiene dos lados iguales:

Sí, el triángulo ABC es isósceles ($AC = BC$).

Idea clave

El área de un triángulo en el espacio, conocidos sus tres vértices, se calcula como la mitad del módulo del producto vectorial de dos de sus lados.

$$\overrightarrow{AB} = (-4, -4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-8, 4, 0).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{vmatrix} = ((-4)(0) - 0(4), 0(-8) - (-4)(0), (-4)(4) - (-4)(-8)) = (0, 0, -48).$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \|(0, 0, -48)\| = \frac{1}{2}(48) = 24.$$

$$\boxed{\text{Área}(ABC) = 24 \text{ u}^2.}$$