

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2026

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Cada pregunta puntúa hasta 2,5 puntos. La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán 0,10 puntos hasta un máximo de un punto.

Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20 % de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90 % de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5 % de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

1.1 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.

1.2 (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.

1.3 (1 punto) Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

SOLUCIÓN

Denotamos D = «estar enfermo» y S = «estar sano», con $P(D) = 0.2$ y $P(S) = 0.8$ (sucesos que forman una partición del espacio muestral). Denotamos $+$ = «dar positivo en el test». Los datos del enunciado son las probabilidades condicionadas

$$P(+ | D) = 0.9, \quad P(+ | S) = 0.05.$$

1.1 (0.75 puntos)

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(+) = P(D) \cdot P(+ | D) + P(S) \cdot P(+ | S) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.05 = 0.18 + 0.04 = 0.22.$$

Idea clave

«¿Cuál es la probabilidad de que dé positivo?» es una pregunta de probabilidad total: no sabemos si la persona está enferma o sana, así que sumamos los dos caminos posibles del árbol.

1.2 (0.75 puntos)

Ahora la pregunta es la inversa: conocido el resultado (positivo), buscamos la probabilidad de una causa (estar sano). Es una aplicación directa del teorema de Bayes:

$$P(S | +) = \frac{P(S) \cdot P(+ | S)}{P(+)} = \frac{0.8 \cdot 0.05}{0.22} = \frac{0.04}{0.22} = \frac{2}{11} \approx 0.1818.$$

1.3 (1 punto)

Sea X = número de personas enfermas entre las 8 elegidas. Como cada persona tiene la enfermedad de forma independiente con probabilidad $P(D) = 0.2$, se tiene $X \sim B(8, 0.2)$. Buscamos

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{8}{0} 0.2^0 0.8^8 + \binom{8}{1} 0.2^1 0.8^7 + \binom{8}{2} 0.2^2 0.8^6.$$

$$P(X \leq 2) = 0.16777 + 0.33554 + 0.29360 = 0.79692.$$

Idea clave

Este valor puede leerse directamente en la tabla de la distribución binomial adjunta al examen, fila $n = 8$, $k = 2$, columna $p = 0.20$: $F(2) = 0.7969$.

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2.5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

Opción 2.1

ENUNCIADO

El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz cuadrada T de orden

3. El vector tensión en la dirección de $n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por $v = Tn$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tn = v$ en función del parámetro real m .

2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tn = v$ para $m = -1$.

2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

SOLUCIÓN

2.1.1 (1 punto)

La matriz de coeficientes del sistema $Tn = v$ es la propia matriz T , que es cuadrada. Calculamos su determinante desarrollando por la tercera fila (que solo tiene un elemento no nulo):

$$|T| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 4 - m^2 = (2 - m)(2 + m).$$

Idea clave

Como el sistema es cuadrado (3 ecuaciones, 3 incógnitas), basta localizar los valores de m que anulan $|T|$: fuera de ellos, el sistema es compatible determinado de forma inmediata.

Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$: $|T| \neq 0$, luego $rg(T) = rg(T') = 3 = n$. El sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Si $m = 2$: $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Las dos primeras ecuaciones son la misma ($2x + 2y = 4$) y la tercera es $z = -2$.

Por tanto $rg(T) = rg(T') = 2 < 3 = n$: el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**, con infinitas soluciones.

Si $m = -2$: $T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Las dos primeras ecuaciones dan $x - y = 2$ y $x - y = -2$, contradictorias entre sí. Por tanto $rg(T) = 2 \neq rg(T') = 3$: el sistema es **incompatible (SI)**.

2.1.2 (0.75 puntos)

Para $m = -1$, el sistema es

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 2y = 4 \\ z = -2 \end{cases}$$

De la primera ecuación, $y = 2x - 4$; sustituyendo en la segunda: $-x + 2(2x - 4) = 4 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$, luego $y = 4$. La solución es

$$(x, y, z) = (4, 4, -2).$$

Idea clave

Fíjate en que, para $m = -1$, la solución coincide justamente con el vector $v = (4, 4, -2)$: es una comprobación rápida de que el resultado es coherente.

2.1.3 (0.75 puntos)

Para $m = 2$: $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(T - \alpha I) = \begin{vmatrix} 2 - \alpha & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha) [(2 - \alpha)^2 - 4].$$

Como $(2 - \alpha)^2 - 4 = \alpha^2 - 4\alpha = \alpha(\alpha - 4)$, resulta

$$\det(T - \alpha I) = (1 - \alpha) \cdot \alpha \cdot (\alpha - 4) = 0 \implies \alpha = 0, 1, 4.$$

Las tensiones principales para $m = 2$ son $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 4$.

Opción 2.2

ENUNCIADO

Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta. Se pide:

2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

SOLUCIÓN

2.2.1 (0.75 puntos)

Calculamos $A \cdot A^T$:

$$\begin{aligned} A \cdot A^T &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \end{aligned}$$

Como $A \cdot A^T = I$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene $A^{-1} = A^T$: A es ortogonal para cualquier valor real de α .

2.2.2 (0.75 puntos)

Imponemos $B \cdot B^T = I$:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Para que sea la identidad necesitamos $a^2 = 1$ y $b^2 = 1$, es decir, $a = \pm 1$, $b = \pm 1$. Existen, por tanto, $2 \times 2 = 4$ matrices ortogonales de esta forma.

Idea clave

No hace falta comprobar también $B^T B = I$: si B es cuadrada y $B B^T = I$, entonces $B^T = B^{-1}$ automáticamente, luego también $B^T B = I$.

2.2.3 (1 punto)

Despejamos BX :

$$BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Como B es ortogonal, $B^{-1} = B^T$. Multiplicando la ecuación por B^T por la izquierda, $B^T B$ se convierte en la identidad y despejamos X sin necesidad de invertir B .

Multiplicamos ambos lados por B^T por la izquierda:

$$B^T(BX) = B^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies (B^T B)X = B^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como B es ortogonal, $B^T B = I$, luego

$$X = B^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Recordando que $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (con $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, del apartado 2.2.2), se tiene $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y

por tanto

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}.$$

Como (a, b) puede ser cualquiera de las 4 combinaciones de signos encontradas en 2.2.2, hay **4 matrices** X que resuelven la ecuación, una por cada matriz ortogonal B posible:

$$X \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(correspondientes, respectivamente, a $(a, b) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.)

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

Opción 3.1

ENUNCIADO

Dada la recta $r : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi : 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

SOLUCIÓN

La recta r tiene vector director $\vec{d}_r = (2, -1, 1)$ (los denominadores de las fracciones), y el plano π tiene vector normal $\vec{n}_\pi = (2, m, 1)$.

3.1.1 (0.5 puntos)

Que r y π sean perpendiculares equivale a que $\vec{d}_r$ y $\vec{n}_\pi$ sean paralelos (proporcionales):

$$\frac{2}{2} = \frac{-1}{m} = \frac{1}{1}.$$

Las componentes x y z ya dan la misma razón ($1 = 1$), así que basta imponer la razón de la componente y :

$$\frac{-1}{m} = 1 \implies m = -1.$$

3.1.2 (0.75 puntos)

Que r y π sean paralelos equivale a $\vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi$, es decir, $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$:

$$(2, -1, 1) \cdot (2, m, 1) = 4 - m + 1 = 5 - m = 0 \implies m = 5.$$

(Comprobamos que la recta no queda contenida en el plano: el punto de r dado por $(0, -1, 1)$ no verifica π con $m = 5$, ya que $2(0) + 5(-1) + 1 - 3 = -7 \neq 0$.)

3.1.3 (1.25 puntos)

Parametrizamos r : $(x, y, z) = (2t, -1 - t, 1 + t)$, y sustituimos en π :

$$2(2t) + m(-1 - t) + (1 + t) - 3 = 0 \implies t(5 - m) = m + 2 \implies t = \frac{m + 2}{5 - m}, \quad m \neq 5.$$

Sustituyendo en la parametrización de r , el punto de intersección es

$$\left(\frac{2(m + 2)}{5 - m}, \frac{7}{m - 5}, \frac{7}{5 - m} \right), \quad m \neq 5.$$

Para $m = 5$ no existe intersección, pues r y π son paralelos y no contenidos (apartado 3.1.2).

Opción 3.2

ENUNCIADO

Consideramos la recta s del espacio con ecuación:

$$\frac{x - 1}{0} = y - 1 = \frac{z - 1}{-1}.$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es perpendicular a s .

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .

SOLUCIÓN

El vector director de s es $\vec{d}_s = (0, 1, -1)$, y un punto de s es $(1, 1, 1)$.

3.2.1 (0.5 puntos)

Un plano perpendicular a s tiene a $\vec{d}_s$ como vector normal; imponiendo que pase por $(1, 1, 1)$:

$$0(x - 1) + 1(y - 1) - 1(z - 1) = 0 \implies y - z = 0.$$

3.2.2 (1 punto)

Un punto genérico de s es $(1, 1 + t, 1 - t)$. Su distancia al origen al cuadrado es

$$d^2 = 1^2 + (1 + t)^2 + (1 - t)^2 = 3 + 2t^2.$$

Imponiendo $d = 4$:

$$3 + 2t^2 = 16 \implies t^2 = \frac{13}{2} \implies t = \pm \frac{\sqrt{26}}{2}.$$

Los puntos buscados son

$$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(1, 1 - \frac{\sqrt{26}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{26}}{2}\right).$$

3.2.3 (1 punto)

El eje Z tiene vector director $\vec{k} = (0, 0, 1)$. El ángulo entre s y el eje Z se calcula con

$$\cos \theta = \frac{|\vec{d}_s \cdot \vec{k}|}{|\vec{d}_s| |\vec{k}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta = 45^\circ.$$

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

Opción 4.1

ENUNCIADO

Consideremos la función real de variable real $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$. Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.4 (0.5 puntos) Representar la función f .

SOLUCIÓN

4.1.1 (0.5 puntos)

El denominador $x^2 + 1$ nunca se anula (siempre $x^2 + 1 \geq 1$), así que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Al ser cociente de funciones continuas con denominador que no se anula en ningún punto, f es continua en todo $\mathbb{R}$.

4.1.2 (0.5 puntos)

Asíntotas. Como el dominio es $\mathbb{R}$, no hay asíntotas verticales. Estudiamos el comportamiento en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0,$$

ya que el grado del denominador es mayor que el del numerador. Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

Monotonía. Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - (x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Igualamos el numerador a cero: $-x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$, cuyas soluciones son

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Como el denominador $(x^2 + 1)^2$ es siempre positivo, el signo de f' coincide con el signo de $-x^2 - 2x + 1$ (una parábola invertida), que es positivo *entre* sus raíces y negativo fuera de ellas:

- Decreciente en $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$.
- Creciente en $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$.
- Decreciente en $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$.

4.1.3 (1 punto)

En $x = -1 - \sqrt{2}$ la derivada pasa de negativa a positiva: **mínimo relativo**. En $x = -1 + \sqrt{2}$ pasa de positiva a negativa: **máximo relativo**. Calculamos los valores:

$$f(-1 - \sqrt{2}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \approx -0.207, \quad f(-1 + \sqrt{2}) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1.207.$$

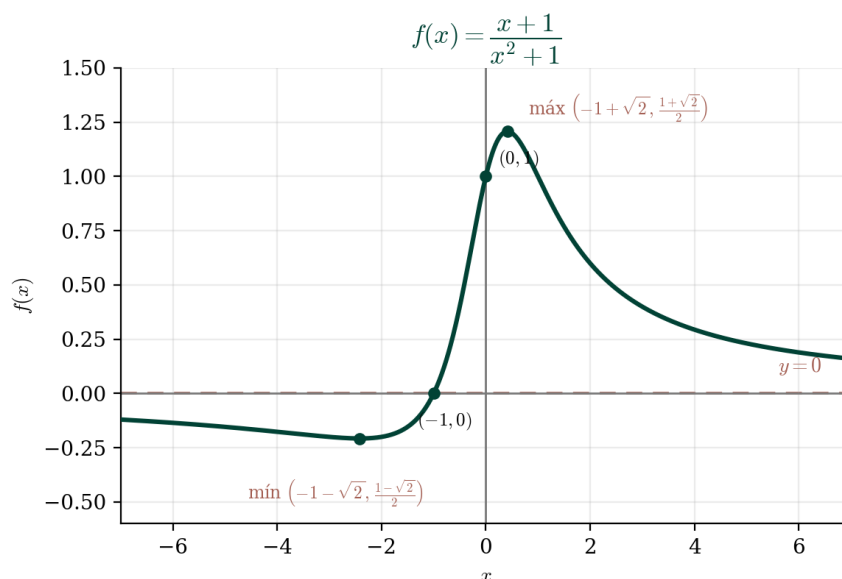
Idea clave

Como $f \rightarrow 0$ en ambos extremos y f solo cambia de sentido en estos dos puntos, estos mismos valores son también los extremos **absolutos**: no hay ningún otro punto de la gráfica que los supere ni por arriba ni por abajo.

Por tanto: mínimo absoluto en $\left(-1 - \sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\right)$ y máximo absoluto en $\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\right)$.

4.1.4 (0.5 puntos)

Datos útiles para la representación: $f(0) = 1$ (corte con el eje Y); $f(-1) = 0$ (único corte con el eje X, ya que $x + 1 = 0$ es la única forma de anular el numerador); asíntota horizontal $y = 0$ en ambas direcciones; decrece hasta el mínimo $(-1 - \sqrt{2}, \approx -0.21)$, crece hasta el máximo $(-1 + \sqrt{2}, \approx 1.21)$ pasando por $(-1, 0)$, y vuelve a decrecer hacia 0 para x grande.



Opción 4.2

ENUNCIADO

Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0, 12]$.

4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.

4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

SOLUCIÓN

4.2.1 (1.25 puntos)

La función $g(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ tiene periodo $T = \frac{2\pi}{\pi/9} = 18$; como el intervalo $[0, 12]$ tiene longitud $12 < 18$, en la pared solo se representan **dos tercios** de un periodo completo.

Idea clave

No des por hecho que el tramo dibujado es un periodo completo solo porque lo fue en otros exámenes parecidos: comprueba siempre la longitud del intervalo frente al periodo real de la función.

Cortes con los ejes. En $x = 0$: $g(0) = \cos(0) + 2 = 3$, luego corta al eje Y en $(0, 3)$. Como $\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) \in [-1, 1]$,

se tiene $g(x) \in [1, 3]$ para todo x : la curva nunca vale 0, así que no corta al eje X .

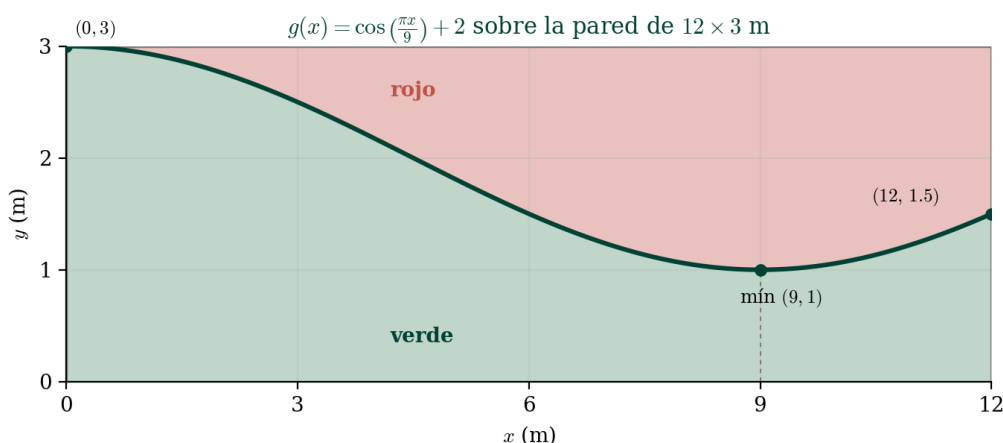
Extremos y monotonía. $g'(x) = -\frac{\pi}{9} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right)$, que se anula en $x = 0$ y $x = 9$ dentro de $[0, 12]$ (el siguiente cero, $x = 18$, queda fuera del intervalo).

- En $(0, 9)$: $\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) > 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ (decreciente).
- En $(9, 12)$: $\frac{\pi x}{9} \in \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right)$, donde el seno es negativo $\Rightarrow g'(x) > 0$ (creciente).

Por tanto, g decrece en $[0, 9]$ y crece en $[9, 12]$. Evaluando en los puntos relevantes:

$$g(0) = 3, \quad g(9) = \cos(\pi) + 2 = 1, \quad g(12) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2 = \frac{3}{2}.$$

El mínimo absoluto es $g(9) = 1$. Comparando los dos extremos del intervalo, el máximo absoluto es $g(0) = 3$ (mayor que $g(12) = 1.5$). La curva dibuja, sobre la pared, un tramo que baja desde $(0, 3)$ hasta el mínimo $(9, 1)$ y vuelve a subir hasta $(12, 1.5)$, sin llegar a recuperar la altura inicial.



4.2.2 (1 punto)

El área total de la pared es $12 \times 3 = 36 \text{ m}^2$. El área verde es la comprendida entre el suelo ($y = 0$) y la curva:

$$A_{\text{verde}} = \int_0^{12} \left[\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right] dx = \left[\frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \right]_0^{12} = \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 24.$$

Como $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$A_{\text{verde}} = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21.52 \text{ m}^2.$$

El área roja es el resto de la pared:

$$A_{\text{rojo}} = 36 - A_{\text{verde}} = 12 + \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 14.48 \text{ m}^2.$$

Idea clave

A diferencia de un periodo completo (donde el término en seno se cancela), aquí el tramo no es un periodo entero y el seno *sí* deja un resto: por eso el área no es un número «redondo».

4.2.3 (0.25 puntos)

Cada bote cubre 3 m^2 y el área verde es aproximadamente 21.52 m^2 :

$$\frac{21.52}{3} \approx 7.17.$$

Como no se puede comprar un bote parcial y hay que cubrir toda la superficie, hacen falta **8 botes** de pintura (7 no llegan a cubrir los 21.52 m^2).