

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Ordinaria 2026

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

RESPONDA A LAS TRES PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA POR PREGUNTA: 2 PUNTOS)**PREGUNTA 1: Probabilidad (2 puntos)****ENUNCIADO**

El 85 % de los alumnos de un instituto viven en la misma localidad en la que se sitúa el centro educativo y el resto en pueblos de alrededor. El 75 % de los alumnos que acuden al instituto desde fuera de la localidad llega puntual a clase por la mañana y el 5 % de los alumnos que viven en la misma localidad que el centro llega tarde a primera hora.

a (1 punto) Calcule el porcentaje de alumnos del instituto que llegan tarde a primera hora.

b (1 punto) Se elige un alumno del centro al azar. Halle la probabilidad de que sea de un pueblo de alrededor si se sabe que ha llegado puntual a clase por la mañana.

SOLUCIÓN

Denotamos L = “vivir en la localidad” y P = “vivir en un pueblo de alrededor”, con

$$P(L) = 0.85, \quad P(P) = 0.15,$$

que forman una partición del espacio muestral. Denotamos T = “llegar tarde”. Los datos del enunciado son las probabilidades condicionadas

$$P(T | P) = 1 - 0.75 = 0.25, \quad P(T | L) = 0.05.$$

Idea clave

El enunciado da directamente la probabilidad de llegar *puntual* desde fuera de la localidad; para trabajar con el mismo suceso T en ambas ramas, la pasamos a “llegar tarde” restando de 1.

Apartado a)

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(T) = P(L) \cdot P(T | L) + P(P) \cdot P(T | P) = 0.85 \cdot 0.05 + 0.15 \cdot 0.25 = 0.0425 + 0.0375 = 0.08.$$

El 8 % de los alumnos del instituto llega tarde a primera hora.

Apartado b)

Ahora la pregunta es la inversa: conocido el resultado (llegar puntual), busquemos la probabilidad de una de las posibles causas (ser de un pueblo de alrededor). Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$P(P | \bar{T}) = \frac{P(P) \cdot P(\bar{T} | P)}{P(\bar{T})}.$$

Como $P(\bar{T} | P) = 1 - 0.25 = 0.75$ y $P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0.08 = 0.92$:

$$P(P | \bar{T}) = \frac{0.15 \cdot 0.75}{0.92} = \frac{0.1125}{0.92} \approx 0.1223.$$

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.1223.

PREGUNTA 2: Análisis: optimización (2 puntos)

ENUNCIADO

Un diseñador gráfico propone una bandera usando los colores verde, blanco y rojo. Para ello considera un rectángulo de base 8 y altura 2, toma como origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del rectángulo y los lados izquierdo e inferior están sobre los ejes coordenados OY y OX , respectivamente. En el rectángulo descrito traza la curva de ecuación $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ que va del vértice superior izquierdo del rectángulo al vértice inferior derecho. El diseñador quiere que la parte del rectángulo que queda por encima de la curva dada sea blanca. Para la parte que queda por debajo de la curva, toma un nuevo rectángulo con el vértice inferior izquierdo en el origen de coordenadas y el superior derecho en la curva. Ese rectángulo sería verde y lo que queda sería rojo.

Calcule el área que ocupa cada color en esta bandera si el diseñador quiere que el área roja sea la menor posible.

SOLUCIÓN

Comprobamos primero los extremos de la curva: $y(0) = 2 - \sqrt[3]{0} = 2$ (vértice superior izquierdo) e $y(8) = 2 - \sqrt[3]{8} = 2 - 2 = 0$ (vértice inferior derecho), tal como describe el enunciado.

Bandera: curva $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ y área roja mínima

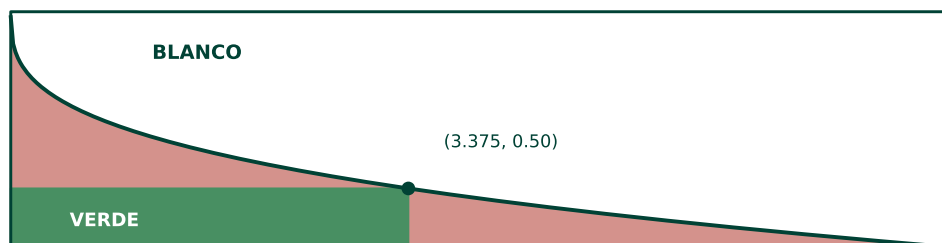


Figura 1: Reparto de colores en la bandera y vértice óptimo del rectángulo verde.

Área blanca. Es la comprendida entre la curva y la parte superior del rectángulo ($y = 2$):

$$A_{\text{blanca}} = \int_0^8 [2 - (2 - \sqrt[3]{x})] dx = \int_0^8 x^{1/3} dx = \left[\frac{3}{4} x^{4/3} \right]_0^8 = \frac{3}{4} \cdot 8^{4/3} = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12.$$

El área total del rectángulo grande es $8 \times 2 = 16$, así que el área que queda por debajo de la curva (a repartir entre verde y rojo) es

$$A_{\text{verde}} + A_{\text{roja}} = 16 - 12 = 4.$$

Rectángulo verde. Llamamos $a \in (0, 8)$ a la abscisa del vértice superior derecho del rectángulo verde, que está sobre la curva: dicho vértice es $(a, 2 - \sqrt[3]{a})$. El área verde es

$$A_{\text{verde}}(a) = a(2 - \sqrt[3]{a}) = 2a - a^{4/3}.$$

El área roja es el resto de la región bajo la curva:

$$A_{\text{roja}}(a) = 4 - A_{\text{verde}}(a) = 4 - 2a + a^{4/3}.$$

Idea clave

El enunciado pide minimizar el área roja, no maximizarla: por eso derivamos $A_{\text{roja}}(a)$, no $A_{\text{verde}}(a)$, aunque ambas funciones están relacionadas por $A_{\text{roja}} = 4 - A_{\text{verde}}$.

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'_{\text{roja}}(a) = -2 + \frac{4}{3}a^{1/3} = 0 \implies a^{1/3} = \frac{3}{2} \implies a = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$$

Como $A''_{\text{roja}}(a) = \frac{4}{9}a^{-2/3} > 0$ para todo $a > 0$, el punto crítico es un mínimo.

Con $a = \frac{27}{8}$:

$$2 - \sqrt[3]{a} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \quad A_{\text{verde}} = \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{16}, \quad A_{\text{roja}} = 4 - \frac{27}{16} = \frac{37}{16}.$$

Resumen de áreas: blanca = 12, verde = $\frac{27}{16} = 1.6875$, roja = $\frac{37}{16} = 2.3125$ (comprobación: $12 + 1.6875 + 2.3125 = 16$)

$2.3125 = 16$, el área total del rectángulo).

PREGUNTA 3: Álgebra (2 puntos)

ENUNCIADO

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a (1 punto) Resuelva la ecuación matricial: $AX + X = B$.

b) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

b1) Calcule el determinante de la matriz $(2C)^{100}$ aplicando propiedades de los determinantes.

b2) Justifique si las matrices A y AB son invertibles.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

$AX + X = B$ no tiene la forma habitual $AX = B$. Sacamos X factor común: $AX + X = (A + I)X$. Así reducimos el problema a una ecuación matricial estándar.

$$AX + X = B \implies (A + I)X = B \implies X = (A + I)^{-1}B,$$

siempre que $A + I$ sea invertible. Calculamos

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Su determinante, desarrollando por la primera columna:

$$|A + I| = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 - 0) = 8 \neq 0,$$

luego $A + I$ es invertible. Calculamos su inversa mediante la matriz adjunta. Los cofactores $c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ de $A + I$ son:

$$c_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$c_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$c_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$c_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$c_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$c_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

La matriz de cofactores y su traspuesta (adjunta) son

$$C_{A+I} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(A+I) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$X = (A+I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Apartado b1)

Utilizamos dos propiedades de los determinantes:

- $|\alpha M| = \alpha^n |M|$ para una matriz cuadrada M de orden n y α escalar.
- $|M^k| = |M|^k$.

Como C es de orden 3 y es triangular inferior con unos en la diagonal, $|C| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Aplicando la primera propiedad con $\alpha = 2$, $n = 3$:

$$|2C| = 2^3 |C| = 8 \cdot 1 = 8.$$

Aplicando la segunda propiedad con $k = 100$:

$$|(2C)^{100}| = |2C|^{100} = 8^{100} = (2^3)^{100} = 2^{300}.$$

El determinante de $(2C)^{100}$ es 2^{300} (equivalentemente, 8^{100}).

Apartado b2)

Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera fila:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(1) + 1(0) = 1 \neq 0.$$

A es invertible, ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

Idea clave

Antes de hablar de si AB es invertible, hay que comprobar que AB es una matriz cuadrada: solo las matrices cuadradas pueden tener inversa.

La matriz A es de orden 3×3 y B es de orden 3×2 . El producto AB está bien definido (el número de columnas de A coincide con el número de filas de B) y su tamaño es

$$AB : (3 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 3 \times 2.$$

AB no es invertible, porque no es una matriz cuadrada: el concepto de matriz inversa solo está definido para matrices cuadradas, independientemente de que A sea invertible.

RESPONDA A UNA DE LAS DOS PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2 puntos)

Pregunta 4.1.

ENUNCIADO

Sean las rectas $r_1 \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1, 0)$ y $r_2 \equiv (x, y, z) = (1 + s, s, 0), t, s \in \mathbb{R}$.

a (1 punto) Estudie la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 .

b (1 punto) Halle una recta r_3 tal que las intersecciones de r_1 , r_2 y r_3 formen un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa esté contenida en r_2 y tenga longitud $\sqrt{2}$.

SOLUCIÓN

Idea clave

La tercera coordenada de ambas rectas es siempre 0: todo el problema ocurre en el plano $z = 0$. Podemos razonar como si trabajásemos en el plano XY , aunque las rectas estén escritas en forma vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Apartado a)

Los vectores directores son $\vec{d}_1 = (1, 0, 0)$ y $\vec{d}_2 = (1, 1, 0)$, que no son proporcionales, luego r_1 y r_2 no son paralelas.

Tomamos un punto de cada recta, $P_1 = (1, 1, 0) \in r_1$ y $P_2 = (1, 0, 0) \in r_2$, y formamos $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, -1, 0)$. Estudiamos el rango de la matriz formada por $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rg} = 2$$

(la tercera columna es siempre nula). Como el rango es 2 y $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ ya son linealmente independientes entre sí, las rectas son coplanarias y no paralelas: por tanto, r_1 y r_2 **son secantes** (se cortan en un punto).

Para hallar el punto de corte, igualamos:

$$1 + t = 1 + s, \quad 1 = s, \quad 0 = 0 \implies s = 1, \quad t = 1.$$

El punto de corte es $A = (2, 1, 0)$.

Apartado b)

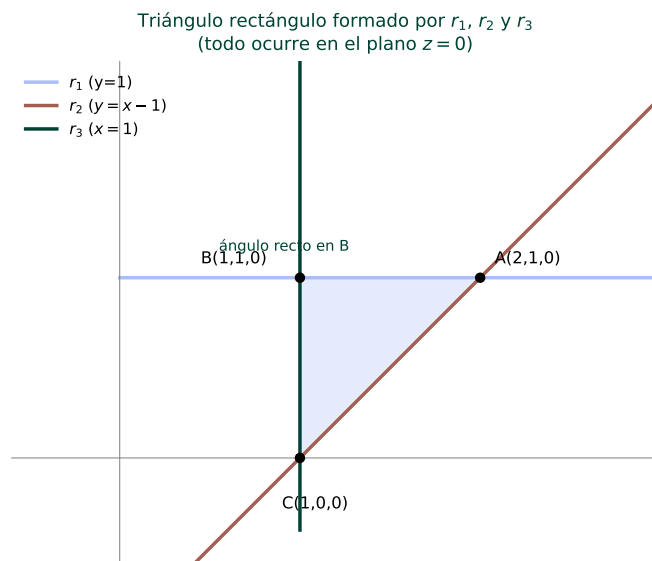


Figura 2: Triángulo rectángulo formado por r_1 , r_2 y r_3 (todo en el plano $z = 0$).

Buscamos un punto C sobre r_2 tal que la distancia de A a C sea $\sqrt{2}$ (la hipotenusa, contenida en r_2).

Idea clave

El vector director de r_2 es $\vec{d}_2 = (1, 1, 0)$, con módulo $|\vec{d}_2| = \sqrt{2}$. Esto significa que, al variar el parámetro s en una unidad, nos desplazamos sobre r_2 exactamente $\sqrt{2}$: no hace falta ningún cálculo adicional para situar C .

Como A corresponde a $s = 1$, tomamos C en $s = 0$: $C = (1, 0, 0)$ (que es precisamente el punto de r_2 dado en el enunciado). En efecto,

$$d(A, C) = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

Ahora necesitamos que el tercer vértice B (intersección de r_1 y r_3) forme un ángulo recto en B . Esto exige que la dirección de r_3 sea perpendicular a la de r_1 , $\vec{d}_1 = (1, 0, 0)$:

$$\vec{d}_3 \cdot \vec{d}_1 = 0.$$

Elegimos, por sencillez, $\vec{d}_3 = (0, 1, 0)$ (claramente perpendicular a $\vec{d}_1$), y hacemos pasar r_3 por $C = (1, 0, 0)$:

$$r_3 \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) = (1, \mu, 0), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Comprobación. r_3 corta a r_1 (que tiene $y = 1$ fijo) en $\mu = 1$: $B = (1, 1, 0)$. Los tres vértices son

$$A = (2, 1, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (1, 0, 0).$$

Comprobamos el ángulo recto en B :

$$\overrightarrow{BA} = (1, 0, 0), \quad \overrightarrow{BC} = (0, -1, 0), \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

Y las longitudes: $|BA| = 1$, $|BC| = 1$, $|AC| = \sqrt{2}$, que verifica el teorema de Pitágoras ($1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$) con

la hipotenusa AC contenida en r_2 , como se pedía.

Una recta válida es $r_3 \equiv (x, y, z) = (1, \mu, 0)$, es decir, $x = 1, z = 0$.

Pregunta 4.2.

ENUNCIADO

Se consideran el punto $P(1, 2, 1)$ y el plano de ecuación $2x - 2y + z = 1$. Se traza un cubo con una cara en el plano y un vértice en el punto P .

a (1 punto) Determine la longitud del lado de dicho cubo y su volumen.

b (1 punto) Halle otro vértice del cubo.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Si una cara del cubo está contenida en el plano, la cara opuesta es paralela a ella y está a una distancia igual a la arista del cubo. El punto P , al ser un vértice que no está en la cara del plano, pertenece a esa cara opuesta: por tanto, la distancia de P al plano es exactamente la longitud de la arista.

El vector normal del plano es $\vec{n} = (2, -2, 1)$, con $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$. La distancia de $P(1, 2, 1)$ al plano $2x - 2y + z - 1 = 0$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|2(1) - 2(2) + 1 - 1|}{3} = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{3}.$$

La arista del cubo mide $\frac{2}{3}$, y su volumen es

$$V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

Apartado b)

El vértice del cubo más sencillo de hallar, además de P , es el pie de la perpendicular trazada desde P al plano: ambos vértices están unidos por una arista del cubo (la que es perpendicular a la cara apoyada en el plano).

Idea clave

P está en el lado donde $2x - 2y + z - 1 < 0$ (vale -2 en P). Para llegar al plano debemos desplazarnos en la dirección en la que esa expresión *aumenta*, es decir, en el sentido de $+\vec{n}$, no de $-\vec{n}$.

Con el vector unitario $\hat{n} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$ y arista $d = \frac{2}{3}$:

$$F = P + d\hat{n} = (1, 2, 1) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(2, -2, 1) = (1, 2, 1) + \frac{2}{9}(2, -2, 1) = \left(1 + \frac{4}{9}, 2 - \frac{4}{9}, 1 + \frac{2}{9}\right).$$

$$F = \left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9} \right).$$

Comprobación: $2\left(\frac{13}{9}\right) - 2\left(\frac{14}{9}\right) + \frac{11}{9} = \frac{26 - 28 + 11}{9} = \frac{9}{9} = 1$, luego F pertenece al plano, como debía ser.

Otro vértice del cubo es $F = \left(\frac{13}{9}, \frac{14}{9}, \frac{11}{9} \right)$.

RESPONDA A UNA DE LAS DOS PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2 puntos)

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Halle el dominio, los intervalos de crecimiento

y decrecimiento, los extremos relativos con sus correspondientes valores.

SOLUCIÓN

Dominio. Necesitamos $x > 0$ (para que exista $\ln x$) y $\ln x \neq 0$, es decir, $x \neq 1$ (para que el denominador no se anule). Por tanto,

$$\text{Dom}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Derivada. Aplicando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

Idea clave

El denominador $(\ln x)^2$ es siempre positivo (allí donde está definido), así que el signo de $f'(x)$ depende únicamente del numerador $\ln x - 1$.

Igualamos el numerador a cero:

$$\ln x - 1 = 0 \implies x = e.$$

Como $e \approx 2.718 > 1$, este punto crítico está en el dominio. Estudiamos el signo de f' en los tres intervalos que quedan determinados por $x = 1$ (frontera del dominio) y $x = e$:

- En $(0, 1)$: $\ln x < 0 < 1$, luego $\ln x - 1 < 0 \implies f'(x) < 0$ (decreciente).
- En $(1, e)$: $0 < \ln x < 1$, luego $\ln x - 1 < 0 \implies f'(x) < 0$ (decreciente).
- En $(e, +\infty)$: $\ln x > 1 \implies f'(x) > 0$ (creciente).

Monotonía: f es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e)$ y creciente en $(e, +\infty)$.

Como f' pasa de negativa a positiva en $x = e$, hay un **mínimo relativo** en ese punto:

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} = \frac{e}{1} = e.$$

Mínimo relativo en (e, e) . No hay máximos relativos, ya que en $x = 1$ la función no está definida (es una discontinuidad, no un extremo).

Pregunta 5.2. (2 puntos) Halle el valor real a tal que $\int_0^{\pi/3} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = \frac{2\pi}{9}$.

SOLUCIÓN

Separamos la integral pensando en integración por partes sobre $(x-a) \operatorname{sen}(3x)$, con

$$u = x - a, \quad dv = \operatorname{sen}(3x) dx \implies du = dx, \quad v = -\frac{\cos(3x)}{3}.$$

$$\int (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx = -\frac{(x-a)\cos(3x)}{3} + \int \frac{\cos(3x)}{3} dx = -\frac{(x-a)\cos(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{9} + C.$$

Aplicamos la regla de Barrow entre 0 y $\pi/3$. En $x = \pi/3$: $\cos(3 \cdot \pi/3) = \cos(\pi) = -1$ y $\operatorname{sen}(\pi) = 0$. En $x = 0$: $\cos(0) = 1$ y $\operatorname{sen}(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} (x-a) \operatorname{sen}(3x) dx &= \left[-\frac{(\pi/3 - a)(-1)}{3} + 0 \right] - \left[-\frac{(0-a)(1)}{3} + 0 \right] = \frac{\pi/3 - a}{3} - \frac{a}{3}. \\ &= \frac{\pi}{9} - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{\pi}{9} - \frac{2a}{3}. \end{aligned}$$

Idea clave

Antes de despejar a , conviene simplificar la expresión completamente: aquí los dos términos en a (uno de cada límite de integración) se suman en lugar de cancelarse, así que no hay que dar por hecho que desaparecen.

Igualamos al valor pedido:

$$\frac{\pi}{9} - \frac{2a}{3} = \frac{2\pi}{9} \implies -\frac{2a}{3} = \frac{\pi}{9} \implies a = -\frac{3\pi}{9 \cdot 2} = -\frac{\pi}{6}.$$

El valor buscado es $a = -\frac{\pi}{6}$.