

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2022

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Formato de este examen: elige 3 problemas de los 6 propuestos. Cada problema puntúa hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio es la suma de las calificaciones de los 3 problemas elegidos, dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Idea clave

Este examen (2022) usa un formato distinto a los anteriores: solo **6 problemas**, de los que se responden 3 (no 8/4 como en 2023-2024). Aquí resolvemos los 6, como recurso de repaso completo.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PROBLEMA 1: Matrices, inversa y potencias (10 puntos)**ENUNCIADO**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
- Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
- Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n . (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) Como A es 2×3 y B es 2×3 , para multiplicarlas trasponemos B : B^T es 3×2 , y AB^T resulta 2×2 .

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos AB^T fila por fila. Fila 1 de A es $(1, 0, 1)$: contra la columna 1 de B^T , $(1, 1, 1)^T$: $1(1)+0(1)+1(1) = 2$; contra la columna 2, $(0, 1, 0)^T$: $1(0) + 0(1) + 1(0) = 0$.

Fila 2 de A es $(-1, 2, -1)$: contra columna 1: $-1(1)+2(1)-1(1) = 0$; contra columna 2: $-1(0)+2(1)-1(0) = 2$.

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

Idea clave

¡ AB^T resulta ser exactamente $2I$! Esto simplifica enormemente los tres apartados: en vez de trabajar con una matriz genérica, trabajamos con un simple múltiplo de la identidad.

Entonces:

$$C - AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es $(-1)(-3) - (1)(0) = 3 \neq 0$, así que **tiene inversa**. Usando la fórmula directa para matrices 2×2 :

$$(C - AB^T)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Reagrupamos la ecuación: $CX - AB^T X = I \Rightarrow (C - AB^T)X = I \Rightarrow X = (C - AB^T)^{-1}$, que ya hemos calculado en el apartado anterior:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Como $AB^T = 2I$, calculamos su potencia n -ésima usando que las potencias de un múltiplo escalar de la identidad son triviales:

$$(AB^T)^n = (2I)^n = 2^n I^n = 2^n I,$$

ya que $I^n = I$ para cualquier n (multiplicar la identidad por sí misma no la cambia). Queda demostrado para todo número natural n .

PROBLEMA 2: Matriz con parámetro: rango, inversa y determinante (10 puntos)**ENUNCIADO**

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Determinar:

- El rango de la matriz A en función del parámetro real m . (4 puntos)
- La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
- El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8 . (2 puntos)

SOLUCIÓN

a) Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera columna:

$$|A| = m \begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} - (-2m) \begin{vmatrix} 0 & m-1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} + 0.$$

Calculamos cada determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} m^2 & 1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m, \quad \begin{vmatrix} 0 & m-1 \\ 2m & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2m(m-1) = -2m^2 + 2m.$$

Sustituyendo:

$$|A| = m(m^2 - 2m) + 2m(-2m^2 + 2m) = m^3 - 2m^2 - 4m^3 + 4m^2 = -3m^3 + 2m^2.$$

Factorizamos: $|A| = -m^2(3m - 2)$, que se anula en $m = 0$ (raíz doble) y $m = \frac{2}{3}$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq \frac{2}{3}$: $|A| \neq 0$, $rg(A) = 3$.

Si $m = 0$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Todas las columnas son múltiplos de $(-1, 1, 1)^T$ salvo las dos primeras, que son nulas: el único menor 1×1 no nulo está en la tercera columna, así que $rg(A) = 1$.

Si $m = \frac{2}{3}$: sustituyendo, se comprueba que existe algún menor 2×2 no nulo (por ejemplo, el formado por las filas 1,2 y columnas 1,3), así que $rg(A) = 2$.

b) Para $m = 2$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, con $|A| = -3(2)^3 + 2(2)^2 = -24 + 8 = -16 \neq 0$.

Idea clave

Calculamos la inversa mediante la matriz adjunta: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$, con $\text{adj}(A) = C^T$ y $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Calculamos los 9 cofactores:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -16,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

La matriz de cofactores es $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$, y su traspuesta:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dividiendo entre $|A| = -16$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Como A es 3×3 , $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 8 \det(A)$. Usando la expresión factorizada del apartado a):

$$\det(2A) = 8(-3m^3 + 2m^2) = -24m^3 + 16m^2.$$

Igualemos a -8 :

$$-24m^3 + 16m^2 = -8 \implies -24m^3 + 16m^2 + 8 = 0 \implies 3m^3 - 2m^2 - 1 = 0$$

(dividiendo entre -8). Probamos $m = 1$: $3 - 2 - 1 = 0$ ✓. Por tanto $m = 1$ es raíz, y es la **única solución real** de esta ecuación cúbica (las otras dos raíces son complejas).

El valor buscado es $m = 1$.

PROBLEMA 3: Posición relativa de dos rectas y recta secante a ambas (10 puntos)

ENUNCIADO

Dadas las rectas $r : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

- Indicar justificadamente la posición relativa de r y s . (5 puntos)
- Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s . (5 puntos)

SOLUCIÓN

Parametrizamos ambas rectas tomando z como parámetro (con nombres distintos para no confundir): r con λ , s con μ .

$$r : (x, y, z) = (\lambda - 1, 2 - 3\lambda, \lambda), \quad \vec{d}_r = (1, -3, 1).$$

$$s : (x, y, z) = (4 - 5\mu, 4\mu - 3, \mu), \quad \vec{d}_s = (-5, 4, 1).$$

a) Comprobamos primero si son paralelas: $\vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-3 \cdot 1 - 1 \cdot 4, 1 \cdot (-5) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 4 - (-3)(-5)) = (-7, -6, -11) \neq \vec{0}$. Como el producto vectorial no es nulo, **no son paralelas**.

Comprobamos si se cortan, igualando las tres coordenadas:

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 4 - 5\mu \\ 2 - 3\lambda = 4\mu - 3 \\ \lambda = \mu \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $\lambda = \mu$. Sustituyendo en la primera: $\lambda - 1 = 4 - 5\lambda \Rightarrow 6\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{6}$. Sustituyendo en la segunda (con $\mu = \lambda = \frac{5}{6}$): $2 - 3\left(\frac{5}{6}\right) = 4\left(\frac{5}{6}\right) - 3 \Rightarrow 2 - \frac{5}{2} = \frac{10}{3} - 3 \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$.

Idea clave

Al no coincidir la segunda ecuación (que no hemos usado para despejar λ, μ) con los valores obtenidos, el sistema es incompatible: no existe ningún punto común. Combinado con que tampoco son paralelas, esto solo deja una posibilidad.

Como r y s no son paralelas ni se cortan, son **rectas cruzadas (que se cruzan sin intersectarse)**.

b) Buscamos un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ tales que O (el origen), R y S estén alineados; es decir, que R y S sean proporcionales como vectores desde el origen: $R = t \cdot S$ para algún escalar t .

Idea clave

Esto plantea un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas (λ, μ, t) , que resolvemos igualando componente a componente.

$$\begin{cases} \lambda - 1 = t(4 - 5\mu) \\ 2 - 3\lambda = t(4\mu - 3) \\ \lambda = t\mu \end{cases}$$

Resolviendo este sistema (por sustitución, partiendo de la tercera ecuación) se obtiene $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$, $t = \frac{1}{2}$. Comprobamos:

$$R = \left(\frac{1}{2} - 1, 2 - 3 \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad S = (4 - 5, 4 - 3, 1) = (-1, 1, 1).$$

Efectivamente $R = \frac{1}{2}S$, así que O , R y S están alineados. La recta l pasa por el origen con dirección $\vec{OS} = (-1, 1, 1)$:

$$l : \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

PROBLEMA 4: Dos planos, punto simétrico e intersección con recta (10 puntos)**ENUNCIADO**

Dados los planos $\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

- Calcular la posición relativa de π_1 y π_2 . (3 puntos)
- Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1, 0, 0)$ respecto del plano π_1 . (4 puntos)
- Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r . (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) De la ecuación paramétrica de π_2 leemos sus dos vectores directores (derivando respecto a α y a β):

$\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (0, 1, -1)$. Su vector normal es:

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = (1(-1) - 1(1), -[1(-1) - 1(0)], 1(1) - 1(0)) = (-2, 1, 1).$$

El normal de π_1 es $\vec{n}_1 = (2, -1, -1)$. Observamos que $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$: son **proporcionales**, así que los planos tienen la misma orientación (son paralelos o coincidentes).

Para distinguir, comprobamos si un punto de π_2 (por ejemplo, con $\alpha = \beta = 0$: el punto $(-1, 1, 0)$) satisface la ecuación de π_1 :

$$2(-1) - 1 - 0 + 4 = -2 - 1 + 4 = 1 \neq 0.$$

Como no se anula, el punto no pertenece a π_1 : los planos son **paralelos y distintos** (no coincidentes).

b) Para hallar el simétrico de $P = (1, 0, 0)$ respecto a $\pi_1 : 2x - y - z + 4 = 0$, usamos la fórmula directa:

$$P' = P - 2 \frac{\vec{n}_1 \cdot P + 4}{|\vec{n}_1|^2} \vec{n}_1.$$

Calculamos $\vec{n}_1 \cdot P = 2(1) - 0 - 0 = 2$, luego $\vec{n}_1 \cdot P + 4 = 6$, y $|\vec{n}_1|^2 = 4 + 1 + 1 = 6$:

$$P' = (1, 0, 0) - 2 \cdot \frac{6}{6} \cdot (2, -1, -1) = (1, 0, 0) - 2(2, -1, -1) = (1 - 4, 0 + 2, 0 + 2) = (-3, 2, 2).$$

c) Parametrizamos $r: (x, y, z) = (1, 0, 2) + l(1, 2, -1)$, y sustituimos en π_1 :

$$2(1+l) - (2l) - (2-l) + 4 = 0 \implies 2 + 2l - 2l - 2 + l + 4 = 0 \implies l + 4 = 0 \implies l = -4.$$

El punto de intersección es:

$$(1 + (-4), 2(-4), 2 - (-4)) = (-3, -8, 6).$$

Comprobamos: $2(-3) - (-8) - 6 + 4 = -6 + 8 - 6 + 4 = 0 \checkmark$.

PROBLEMA 5: Función racional: dominio, asíntotas, extremos y primitiva (10 puntos)

ENUNCIADO

Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$. Obtener:

- El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- Las asíntotas de la función. (2 puntos)
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
- La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) El denominador se anula cuando $x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$, así que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Corte con el eje Y ($x = 0$): $f(0) = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$, punto $(0, -\frac{3}{4})$.

Corte con el eje X: exigiría $x^2 + 3 = 0$, que no tiene solución real (el numerador nunca se anula). **No hay cortes con el eje X.**

b) **Asíntotas verticales:** en $x = 2$ y $x = -2$ (donde se anula el denominador y no el numerador).

Asíntota horizontal: como numerador y denominador tienen el mismo grado, dividimos los coeficientes de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4} = 1.$$

Asíntota horizontal $y = 1$ en ambas direcciones.

c) Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - (x^2 + 3)(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x[(x^2 - 4) - (x^2 + 3)]}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(-7)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-14x}{(x^2 - 4)^2}.$$

Como $(x^2 - 4)^2 > 0$ en todo el dominio, el signo de f' coincide con el signo de $-14x$: positivo si $x < 0$, negativo si $x > 0$, y se anula únicamente en $x = 0$.

Idea clave

Aunque f' solo cambia de signo en $x = 0$, hay que tener cuidado con las asíntotas verticales: dividen el dominio en tres tramos, $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$. El punto $x = 0$ cae dentro del tramo central.

f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$; decreciente en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$. En $x = 0$, f' pasa de positiva a negativa: hay un **máximo relativo** en $(0, -\frac{3}{4})$ (que además es el único extremo).

d) Como el grado del numerador no es menor que el del denominador, dividimos primero: $x^2 + 3 = (x^2 - 4) + 7$, así que

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4) + 7}{x^2 - 4} = 1 + \frac{7}{x^2 - 4}.$$

Descomponemos $\frac{7}{x^2 - 4} = \frac{7}{(x - 2)(x + 2)}$ en fracciones simples: $\frac{7}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$, con $A = \frac{7}{4}$ y $B = -\frac{7}{4}$ (se obtienen evaluando en $x = 2$ y $x = -2$, respectivamente, tras multiplicar por el denominador común).

Idea clave

Comprobación rápida de A y B : $\frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$; para que el numerador sea 7 constante, necesitamos $A + B = 0$ y $2A - 2B = 7$, de donde $A = \frac{7}{4}$, $B = -\frac{7}{4}$.

Integrando término a término:

$$\int f(x) dx = \int \left(1 + \frac{7/4}{x - 2} - \frac{7/4}{x + 2} \right) dx = x + \frac{7}{4} \ln |x - 2| - \frac{7}{4} \ln |x + 2| + C.$$

PROBLEMA 6: Cable dividido en triángulo y cuadrado: área mínima (10 puntos)

ENUNCIADO

Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m de longitud.

- Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde a los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
- Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima, y calcular el área mínima. (7 puntos)

SOLUCIÓN

a) Si el triángulo equilátero tiene lado x , su perímetro es $3x$, así que ese es el trozo de cable dedicado al triángulo. El resto del cable, $240 - 3x$, forma el cuadrado, cuyo lado es $\frac{240 - 3x}{4}$.

Idea clave

El área de un triángulo equilátero de lado x es $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ (se obtiene aplicando Pitágoras para hallar la altura, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, y luego Área = $\frac{1}{2}xh$).

$$\text{Área}_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2, \quad \text{Área}_{\square} = \left(\frac{240-3x}{4}\right)^2.$$

La función suma de áreas es:

$$T(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{(240-3x)^2}{16}, \quad 0 < x < 80$$

(el límite $x < 80$ corresponde a usar todo el cable en el triángulo, dejando nada para el cuadrado).

b) Derivamos:

$$T'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2(240-3x)(-3)}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3(240-3x)}{8}.$$

Igualemos a cero y multiplicamos todo por 8 para quitar denominadores:

$$4\sqrt{3}x - 3(240-3x) = 0 \implies 4\sqrt{3}x - 720 + 9x = 0 \implies x(4\sqrt{3} + 9) = 720.$$

$$x = \frac{720}{9 + 4\sqrt{3}}.$$

Idea clave

Racionalizamos multiplicando numerador y denominador por $(9-4\sqrt{3})$, ya que $(9+4\sqrt{3})(9-4\sqrt{3}) = 81 - 48 = 33$:

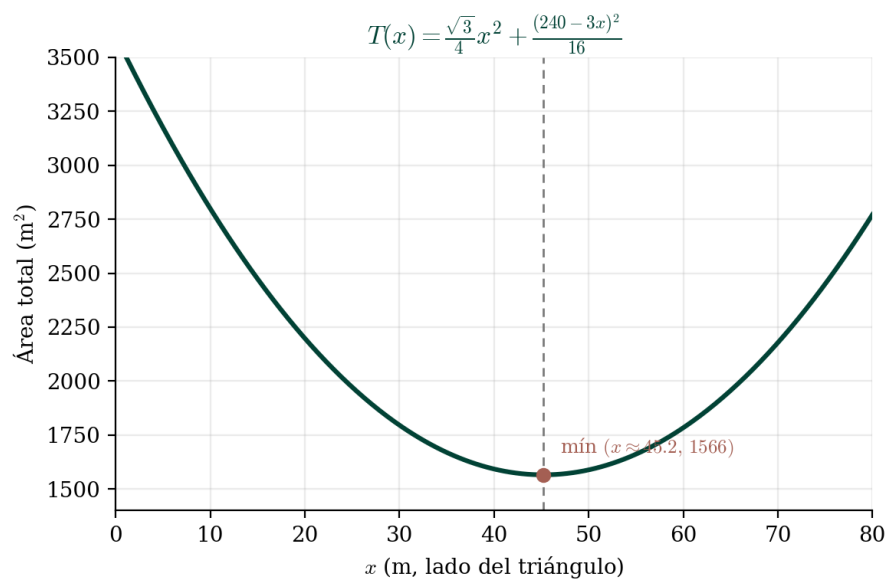
$$x = \frac{720(9-4\sqrt{3})}{33} = \frac{240(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 45.20 \text{ m.}$$

Comprobamos que es un mínimo con la segunda derivada: $T''(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{8} > 0$ siempre (suma de dos constantes positivas), así que cualquier punto crítico es un mínimo.

La longitud de cable necesaria para el triángulo es:

$$3x = \frac{2160}{9 + 4\sqrt{3}} = \frac{720(9-4\sqrt{3})}{11} \approx 135.61 \text{ m.}$$

(y el resto, $240 - 3x \approx 104.39$ m, para el cuadrado).



Sustituyendo en $T(x)$ y simplificando, el área mínima es:

$$T_{\min} = \frac{43200\sqrt{3} - 57600}{11} = \frac{14400(3\sqrt{3} - 4)}{11} \approx 1565.87 \text{ m}^2.$$