

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2026

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, hay que indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates

El enunciado oficial pide responder a 4 de las 6 cuestiones. Por completitud pedagógica, en este material resolvemos las 6 cuestiones.

PREGUNTA 1: Recta que contiene un poste y punto de contacto con el suelo**ENUNCIADO**

El poste central que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es $\pi : x - z = 6$. Sabemos que la cúpula de la carpa (el punto más alto por donde pasa el poste) está en el punto de coordenadas $P = (30, 1, 0)$.

a (1 punto) Calculad la ecuación paramétrica de la recta que contiene el poste.

b (1,5 puntos) Calculad las coordenadas del punto de contacto del poste con el suelo, y la longitud del poste.

SOLUCIÓN**Idea clave**

El poste es perpendicular al suelo, así que su dirección coincide con la del vector normal del plano π . Conocer un punto (la cúpula P) y una dirección ya determina completamente la recta.

a) Ecuación de la recta.

El plano $\pi : x - z = 6$ tiene vector normal

$$\vec{n} = (1, 0, -1). \quad (1)$$

Como el poste es perpendicular al suelo, su vector director es precisamente $\vec{n}$. Usando el punto $P =$

$(30, 1, 0)$, la recta que contiene el poste es

$$r : \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

b) Punto de contacto y longitud.

El punto de contacto Q es la intersección de r con el suelo π . Sustituimos las paramétricas en la ecuación del plano:

$$x - z = 6 \implies (30 + \lambda) - (-\lambda) = 6 \implies 30 + 2\lambda = 6 \implies \lambda = -12. \quad (3)$$

Con $\lambda = -12$:

$$Q = (30 - 12, 1, 12) = (18, 1, 12). \quad (4)$$

La longitud del poste es la distancia entre P y Q :

$$d(P, Q) = \sqrt{(30 - 18)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - 12)^2} = \sqrt{144 + 144} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}. \quad (5)$$

Idea clave

Podemos comprobar el resultado de forma rápida: como $\vec{PQ}$ es paralelo a $\vec{n} = (1, 0, -1)$, su longitud es $|\lambda| \cdot \|\vec{n}\| = 12 \cdot \sqrt{2}$, exactamente lo que hemos obtenido.

PREGUNTA 2: Estudio y tangente de una función racional

ENUNCIADO

Considerad la función

$$f(x) = \frac{9}{x^2 + x - 2}. \quad (6)$$

a (1,25 puntos) Determinad el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b (1,25 puntos) Calculad la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. Representad en un mismo gráfico la función $f(x)$ y la recta tangente.

SOLUCIÓN

a) Dominio, asíntotas, extremos y monotonía.

Dominio. Factorizamos el denominador:

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2). \quad (7)$$

Por tanto, el dominio es

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}. \quad (8)$$

Asíntotas verticales. En $x = -2$ y $x = 1$ el denominador se anula y el numerador (constante, 9) no, así que

ambas rectas son asíntotas verticales:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pm\infty. \quad (9)$$

Asíntota horizontal. El grado del denominador es mayor que el del numerador, luego

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad (10)$$

y $y = 0$ es asíntota horizontal.

Extremos relativos y monotonía. Derivamos usando la regla de la cadena (o del cociente):

$$f'(x) = \frac{-9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}. \quad (11)$$

El denominador $(x^2+x-2)^2$ es siempre positivo donde f está definida, así que el signo de $f'(x)$ depende únicamente de $-(2x+1)$. Igualando a cero:

$$2x+1=0 \implies x = -\frac{1}{2}. \quad (12)$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	0	-	-

Por tanto, f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, -\frac{1}{2})$ y decreciente en $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$. Como f' pasa de positiva a negativa en $x = -\frac{1}{2}$, hay un **máximo relativo**:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2} = \frac{9}{-\frac{9}{4}} = -4 \implies \left(-\frac{1}{2}, -4\right). \quad (13)$$

Idea clave

No hay que confundir creciente en dos intervalos separados por una asíntota con creciente en su unión: la función no está definida en $x = -2$, así que en realidad son dos ramas independientes que, por casualidad, comparten el mismo signo de la derivada.

b) Recta tangente en $x = 4$.

Calculamos el punto y la pendiente:

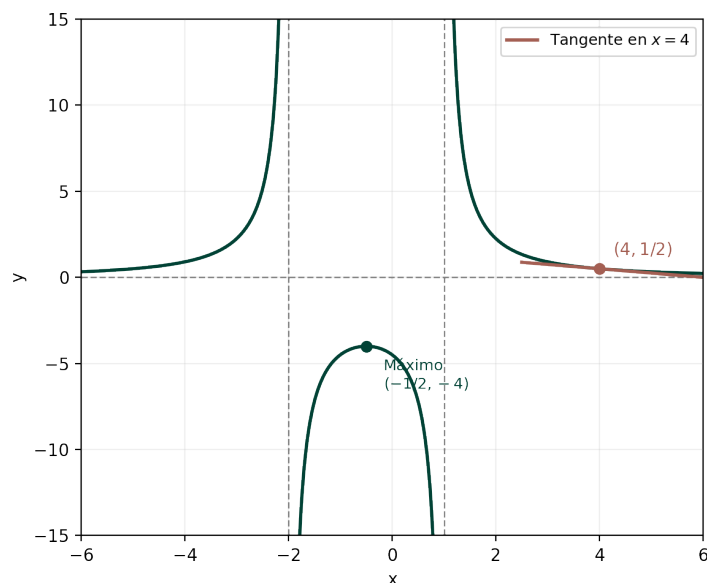
$$f(4) = \frac{9}{16+4-2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, \quad f'(4) = \frac{-9(2 \cdot 4 + 1)}{18^2} = \frac{-81}{324} = -\frac{1}{4}. \quad (14)$$

La recta tangente es

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 4) \implies y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}, \quad (15)$$

o en forma general:

$$x + 4y - 6 = 0. \quad (16)$$



Función $f(x)$ (verde) y recta tangente en $x = 4$ (terracota), junto con el máximo relativo.

PREGUNTA 3: Rango de una matriz con parámetro y ecuación matricial

ENUNCIADO

Considerad la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

que depende del parámetro a .

a (1,25 puntos) Calculad el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a .

b (1,25 puntos) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resolved la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

SOLUCIÓN

a) Rango de A según a .

Como A es cuadrada de orden 3, calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix} = 15a^2 - 60 = 15(a - 2)(a + 2). \quad (19)$$

Idea clave

En un rango dependiente de un parámetro, la estrategia es siempre la misma: calcular el determinante, factorizarlo y estudiar por separado los valores que lo anulan.

Para $a \neq 2$ y $a \neq -2$: $|A| \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 3$.

Para $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) \geq 2$; y como $|A| = 0$, no puede llegar a 3. Por tanto $\text{rg}(A) = 2$.

Para $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

De nuevo $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$, luego $\text{rg}(A) \geq 2$, y como $|A| = 0$, concluimos $\text{rg}(A) = 2$.

En resumen:

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & a \neq \pm 2, \\ 2, & a = \pm 2. \end{cases} \quad (22)$$

b) Resolución de la ecuación matricial.

La ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

es un sistema lineal homogéneo. Curiosamente, la matriz de coeficientes es justo la que aparecía en el apartado anterior para $a = 2$, y ya sabemos que tiene rango 2 (menor que el número de incógnitas, 3). Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado.

Escribimos el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \quad (24)$$

La tercera ecuación es combinación de las dos primeras (fila 3 = 2·fila 2 – fila 1), así que basta resolver el sistema formado por las dos primeras. Tomando $z = \lambda$ como parámetro:

$$\begin{cases} x + 2y = -3\lambda \\ 4x + 5y = -6\lambda \end{cases} \quad (25)$$

Resolviendo, $x = \lambda$, $y = -2\lambda$. Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

PREGUNTA 4: Continuidad/derivabilidad a trozos y primitiva

ENUNCIADO

a (1,25 puntos) Considerad la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{si } x \in (0, e) \\ ax + b, & \text{si } x \in [e, 4) \end{cases}, \quad (27)$$

donde a y b son números reales. Encontrad el valor de a y de b para que la función sea continua y derivable en el intervalo $(0, 4)$.

b (1,25 puntos) Calculad la función $g(x)$ que satisface

$$g'(x) = \frac{x^3}{9x^4 + 1} \quad (28)$$

y que pasa por el punto $(0, -1)$.

SOLUCIÓN

a) Continuidad y derivabilidad.

Idea clave

En una función a trozos, el procedimiento es siempre el mismo: primero imponer continuidad en el punto de empalme, y después derivabilidad (igualdad de derivadas laterales). La continuidad es condición necesaria para la derivabilidad, así que se estudia primero.

El único punto de empalme en $(0, 4)$ es $x = e$.

Continuidad en $x = e$:

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \ln(e) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = ae + b. \quad (29)$$

Igualando:

$$ae + b = 1. \quad (i)$$

Derivabilidad en $x = e$: calculamos las derivadas de cada tramo,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \in (0, e), \quad f'(x) = a \text{ si } x \in (e, 4). \quad (30)$$

Igualando las derivadas laterales en $x = e$:

$$\frac{1}{e} = a. \quad (ii)$$

Sustituyendo (ii) en (i):

$$e \cdot \frac{1}{e} + b = 1 \implies 1 + b = 1 \implies b = 0. \quad (31)$$

Por tanto:

$$a = \frac{1}{e}, \quad b = 0. \quad (32)$$

b) Cálculo de $g(x)$.

Buscamos una primitiva de $g'(x) = \frac{x^3}{9x^4 + 1}$. Observamos que la derivada de $9x^4 + 1$ es $36x^3$, que aparece (salvo un factor constante) en el numerador: es el caso típico de cambio de variable

$$u = 9x^4 + 1, \quad du = 36x^3 dx \implies x^3 dx = \frac{du}{36}. \quad (33)$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{x^3}{9x^4 + 1} dx = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{36} = \frac{1}{36} \ln|u| + C = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) + C, \quad (34)$$

donde hemos quitado el valor absoluto porque $9x^4 + 1 > 0$ para todo x .

Imponemos que pase por $(0, -1)$:

$$g(0) = \frac{1}{36} \ln(1) + C = C = -1. \quad (35)$$

Por tanto:

$$g(x) = \frac{\ln(9x^4 + 1)}{36} - 1. \quad (36)$$

PREGUNTA 5: Invertibilidad de una matriz con parámetro y ecuación matricial

ENUNCIADO

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

en la que a es un parámetro real.

a (1,25 puntos) Calculad los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible.

b (1,25 puntos) Para el caso $a = 3$, resuelve la ecuación $A \cdot X = B - 3I$, en la que

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

SOLUCIÓN

a) Valores de a para los que A es invertible.

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero. Calculamos:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 2a = a(a-1)(a-2). \quad (39)$$

Por tanto:

$$|A| = 0 \iff a = 0, a = 1 \text{ o } a = 2. \quad (40)$$

A es invertible para

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}. \quad (41)$$

b) Caso $a = 3$: resolución de $A \cdot X = B - 3I$.

Para $a = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Como $3 \notin \{0, 1, 2\}$, A es invertible (coherente con el apartado a); en efecto, $|A| = 6 \neq 0$.

Primero simplificamos el lado derecho:

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \quad (43)$$

Idea clave

La ecuación se reduce a $A \cdot X = I$, es decir, X es exactamente la matriz inversa de A . No hace falta calcular ningún producto adicional.

Despejamos usando la inversa (existe, porque $|A| \neq 0$):

$$A \cdot X = I \implies X = A^{-1}. \quad (44)$$

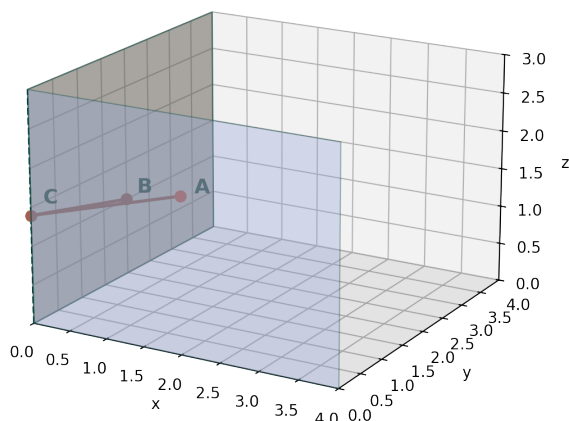
Calculando la inversa de A (por ejemplo, mediante adjuntos o Gauss-Jordan):

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

PREGUNTA 6: Optimización de la longitud de un cable entre dos paredes perpendiculares

ENUNCIADO

La siguiente imagen muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de manera que una pared está en el plano $y = 0$ y la otra está en el plano $x = 0$.



Esquema de las dos paredes perpendiculares y los puntos A , B y C (reconstrucción del original).

En el punto $A = (2, 0, 2)$ queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, el cual está situado en la otra pared, en el punto $B = (0, 2, 1)$. La conexión entre A y B la haremos mediante un cable que pase por el punto $C = (0, 0, h)$, situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Como la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, queremos hacer una instalación con el mínimo cable posible.

a (0,75 puntos) Comprobad que la longitud total del cable necesario, en función de la altura h por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ , viene dada por la expresión

$$L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}. \quad (46)$$

b (1,75 puntos) Calculad las coordenadas del punto C por donde debe pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calculad esta longitud mínima del cable.

SOLUCIÓN

a) Comprobación de la fórmula de $L(h)$.

La longitud total del cable es la suma de las distancias $d(A, C) + d(C, B)$, con $A = (2, 0, 2)$, $C = (0, 0, h)$ y $B = (0, 2, 1)$.

$$d(A, C) = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (2-h)^2} = \sqrt{4 + (h-2)^2} = \sqrt{h^2 - 4h + 8}. \quad (47)$$

$$d(C, B) = \sqrt{(0-0)^2 + (0-2)^2 + (h-1)^2} = \sqrt{4 + (h-1)^2} = \sqrt{h^2 - 2h + 5}. \quad (48)$$

Sumando ambas distancias:

$$L(h) = d(A, C) + d(C, B) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}, \quad (49)$$

que es exactamente la expresión que queríamos comprobar.

b) Minimización de $L(h)$.

Idea clave

Es un problema de optimización con una sola variable (h): derivamos, igualamos a cero, y comprobamos que se trata de un mínimo.

Derivamos $L(h)$ (cada término es de la forma $\sqrt{u}$, con u' el resto):

$$L'(h) = \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}. \quad (50)$$

Igualamos a cero y resolvemos:

$$\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} = -\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}. \quad (51)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando (operación que puede introducir soluciones espurias, así que habrá que comprobar el resultado al final), se obtiene una única solución:

$$h = \frac{3}{2}. \quad (52)$$

Como $L(h) \rightarrow +\infty$ cuando $h \rightarrow \pm\infty$ y solo hay un punto crítico, este debe corresponder necesariamente a un **mínimo absoluto**.

Calculamos la longitud mínima sustituyendo $h = \frac{3}{2}$:

$$L\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} + 8} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 5} \quad (53)$$

$$= \sqrt{\frac{17}{4}} + \sqrt{\frac{17}{4}} = 2\sqrt{\frac{17}{4}} = \sqrt{17}. \quad (54)$$

Por tanto, el punto donde debe pasar el cable es

$$C = \left(0, 0, \frac{3}{2}\right), \quad (55)$$

y la longitud mínima del cable es

$$L_{\min} = \sqrt{17} \text{ (unidades de longitud)}. \quad (56)$$

Idea clave

Este tipo de problema (un punto que se desplaza sobre una recta, minimizando la suma de distancias a puntos fijos situados en planos distintos) es análogo a los clásicos problemas de reflexión: si "desdoblamos" las dos paredes sobre un mismo plano, el camino mínimo se convierte en una línea recta. No es necesario para resolver el ejercicio con derivadas, pero explica por qué el resultado es tan limpio ($\sqrt{17}$).