

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2026

Matemáticas II

Serie 2

Baremo e instrucciones

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, hay que indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates

El enunciado oficial pide responder a 4 de las 6 cuestiones. Por completitud pedagógica, en este material resolvemos las 6 cuestiones de cada serie.

PREGUNTA 1: Parábola, recta tangente y triángulo de área mínima**ENUNCIADO**

Considerad la parábola $y = 4 - x^2$ y un valor $a > 0$.

a (1,25 puntos) Comprobad que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = a$ es $y = -2ax + a^2 + 4$ y calculad los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas.

b (1,25 puntos) Calculad el valor de $a > 0$ para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima.

SOLUCIÓN

a) Ecuación de la tangente y cortes con los ejes.

La derivada de $y = 4 - x^2$ es $y' = -2x$. En el punto de abscisa $x = a$:

$$y(a) = 4 - a^2, \quad y'(a) = -2a. \quad (1)$$

La recta tangente es

$$y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \implies y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2 = -2ax + a^2 + 4, \quad (2)$$

que es justo la expresión que queríamos comprobar.

Corte con el eje Y ($x = 0$):

$$y = a^2 + 4. \quad (3)$$

Corte con el eje X ($y = 0$):

$$0 = -2ax + a^2 + 4 \implies x = \frac{a^2 + 4}{2a}. \quad (4)$$

b) Área mínima del triángulo.

Idea clave

Como $a > 0$, ambos cortes son positivos: la recta, junto con los ejes, determina un triángulo rectángulo en el primer cuadrante. El área es un problema de optimización en la variable a .

El triángulo tiene catetos $\frac{a^2 + 4}{2a}$ (base) y $a^2 + 4$ (altura), así que

$$S(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + 4}{2a} \cdot (a^2 + 4) = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a}. \quad (5)$$

Derivamos respecto de a (cociente):

$$S'(a) = \frac{2(a^2 + 4) \cdot 2a \cdot 4a - (a^2 + 4)^2 \cdot 4}{16a^2} = (a^2 + 4) - \frac{(a^2 + 4)^2}{4a^2}. \quad (6)$$

Igualando a cero y dividiendo por $(a^2 + 4) \neq 0$:

$$1 = \frac{a^2 + 4}{4a^2} \implies 4a^2 = a^2 + 4 \implies 3a^2 = 4 \implies a^2 = \frac{4}{3} \implies a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (7)$$

(tomamos la raíz positiva porque $a > 0$).

Como $S(a) \rightarrow +\infty$ cuando $a \rightarrow 0^+$ o $a \rightarrow +\infty$, y solo hay un punto crítico, este debe ser el mínimo absoluto.

El área mínima es

$$S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{32\sqrt{3}}{9}. \quad (8)$$

PREGUNTA 2: Discusión de un sistema lineal con parámetro

ENUNCIADO

Considerad el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real p :

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \quad (9)$$

a (1,5 puntos) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro p .

b (1 punto) Resolved, si es posible, el sistema para el caso $p = 2$.

SOLUCIÓN

a) Discusión.

La matriz de coeficientes y su determinante son:

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = -p(p-1)(p-2). \quad (10)$$

Idea clave

El determinante factoriza en tres raíces enteras muy limpias: $p = 0, 1, 2$. Estos son exactamente los valores que requieren estudio aparte.

Si $p \neq 0, 1, 2$: $|A| \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas. El sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Si $p = 0$ o $p = 1$: se comprueba que $\text{rg}(A) = 2$ (por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ formado por las filas 1 y 3 es nulo, pero hay otros menores de orden 2 no nulos), mientras que $\text{rg}(A') = 3$ (el término independiente rompe la relación de dependencia). El sistema es **incompatible (SI)**.

Si $p = 2$: $\text{rg}(A) = 2$ y, como veremos en el apartado b), también $\text{rg}(A') = 2$. El sistema es **compatible indeterminado (SCI)**.

b) Resolución para $p = 2$.

El sistema queda:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \quad (11)$$

La primera y la tercera ecuación son idénticas, así que el sistema equivale a

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \quad (12)$$

Tomamos $z = \lambda$ como parámetro. Restando la primera ecuación (multiplicada por 1) a la segunda:

$$(2x + 2y + 4z) - (2x + y + z) = 1 - 2 \implies y + 3z = -1 \implies y = -1 - 3\lambda. \quad (13)$$

Sustituyendo en la primera:

$$2x + (-1 - 3\lambda) + \lambda = 2 \implies 2x = 3 + 2\lambda \implies x = \frac{3}{2} + \lambda. \quad (14)$$

La solución es

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2} + \lambda, -1 - 3\lambda, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

PREGUNTA 3: Punto simétrico y plano perpendicular a otro

ENUNCIADO

Considerad el punto $P = (-1, 3, 1)$, el plano $\pi : x = y$ y la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$.

a (1,25 puntos) Encontrad las coordenadas del punto P' simétrico a P respecto al plano π .

b (1,25 puntos) De todos los planos que contienen la recta r , encontrad la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano π .

SOLUCIÓN

a) Punto simétrico respecto a π .

Escribimos $\pi : x - y = 0$, con vector normal $\vec{n} = (1, -1, 0)$.

Idea clave

Para hallar el simétrico de un punto respecto a un plano: primero se calcula la proyección ortogonal H (el punto medio entre P y P'), y después $P' = 2H - P$.

La recta perpendicular a π por P es $s : (x, y, z) = (-1, 3, 1) + \mu(1, -1, 0)$. Sustituyendo en π :

$$(-1 + \mu) - (3 - \mu) = 0 \implies -4 + 2\mu = 0 \implies \mu = 2. \quad (16)$$

La proyección es

$$H = (-1 + 2, 3 - 2, 1) = (1, 1, 1). \quad (17)$$

Por tanto

$$P' = 2H - P = (2 - (-1), 2 - 3, 2 - 1) = (3, -1, 1). \quad (18)$$

b) Plano que contiene r y es perpendicular a π .

La recta r pasa por $A = (1, 0, 2)$ con vector director $\vec{d} = (2, 3, 1)$.

Idea clave

El plano buscado debe contener la dirección $\vec{d}$ de la recta (porque la contiene) y, además, su vector normal debe ser perpendicular al normal de π (condición de perpendicularidad entre planos). Por tanto, el normal del plano buscado es perpendicular simultáneamente a $\vec{d}$ y a $\vec{n}_\pi$: el candidato natural es su producto vectorial.

$$\vec{n}_{\text{plano}} = \vec{d} \times \vec{n}_\pi = (2, 3, 1) \times (1, -1, 0) = (3 \cdot 0 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = (1, 1, -5). \quad (19)$$

El plano pasa por $A = (1, 0, 2)$:

$$1(x - 1) + 1(y - 0) - 5(z - 2) = 0 \implies x + y - 5z + 9 = 0. \quad (20)$$

PREGUNTA 4: Estudio de $f(x) = \ln(x)/x$: extremo, asíntota y área

ENUNCIADO

Sea la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ definida en el dominio $x > 0$, donde $\ln$ es el logaritmo neperiano.

a (1 punto) Encontrad las coordenadas de un punto de la curva $y = f(x)$ en el cual la recta tangente a la curva sea horizontal y analizad si la función tiene un extremo relativo en ese punto.

b (0,5 puntos) Determinad si la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal.

c (1 punto) Calculad el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = e$. Haced un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio $0 < x < 5$, en el que quede representada el área que habéis calculado.

SOLUCIÓN

a) Punto de tangente horizontal.

Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}. \quad (21)$$

La tangente es horizontal donde $f'(x) = 0$:

$$1 - \ln x = 0 \implies \ln x = 1 \implies x = e. \quad (22)$$

El punto es $(e, f(e)) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$.

Para clasificar el punto, estudiamos el signo de f' : como $x^2 > 0$ siempre, el signo de $f'(x)$ coincide con el de $1 - \ln x$.

x	$(0, e)$	$(e, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$

Como f' pasa de positiva a negativa, en $x = e$ hay un **máximo relativo**.

b) Asíntota horizontal.

Como el dominio es $x > 0$, solo tiene sentido estudiar $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (23)$$

(el logaritmo crece mucho más lento que x). Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal.

c) Área entre $x = 1$ y $x = e$.

En $[1, e]$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} \geq 0$ (ya que $\ln x \geq 0$ en ese intervalo), así que el área coincide con la integral definida:

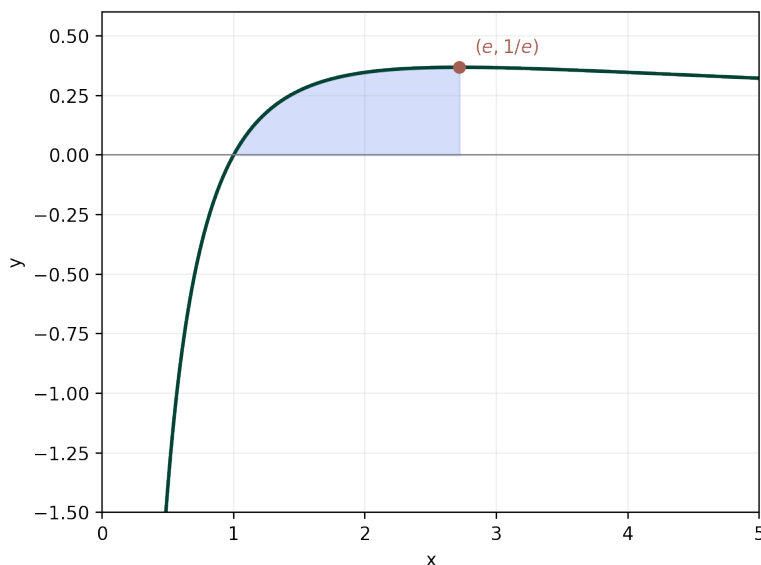
$$\text{Área} = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx. \quad (24)$$

Reconocemos que el numerador es la derivada de $\ln x$ salvo constante, así que usamos el cambio $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C. \quad (25)$$

Aplicando la regla de Barrow:

$$\text{Área} = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}. \quad (26)$$



Gráfica de $f(x) = \ln(x)/x$ en $(0, 5)$, con el área entre $x = 1$ y $x = e$ sombreada, y el máximo relativo señalado.

PREGUNTA 5: Ecuación matricial e inversa expresada mediante un polinomio de M

ENUNCIADO

a (1,25 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $A^2X = A - 3I$, donde I es

la matriz identidad.

b (1,25 puntos) Una matriz cuadrada M satisface que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, donde I es la matriz identidad. Justificad que M es invertible y expresad la inversa de M en función de las matrices M e I .

SOLUCIÓN

a) Resolución de $A^2X = A - 3I$.

Calculamos A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Idea clave

A es una matriz de permutación cíclica: $A^3 = I$ (comprobable multiplicando $A^2 \cdot A$). Esto significa que $A^2 = A^{-1}$, lo que simplifica enormemente el despeje.

Como $|A| = 1 \neq 0$, A^2 también es invertible (de hecho $A^2 = A^{-1}$, así que $(A^2)^{-1} = A$). Despejamos:

$$X = (A^2)^{-1}(A - 3I) = A(A - 3I) = A^2 - 3A. \quad (28)$$

Calculamos:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

b) Invertibilidad de M y expresión de M^{-1} .

Partimos de

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0. \quad (30)$$

Despejamos I y sacamos factor común M por la izquierda en los tres primeros términos:

$$M^3 - 3M^2 + 3M = I \implies M(M^2 - 3M + 3I) = I. \quad (31)$$

Idea clave

Si existe una matriz N tal que $M \cdot N = I$ (con N construida a partir de M), entonces M es invertible y N es precisamente su inversa: no hace falta calcular ningún determinante.

Esta igualdad dice exactamente que M multiplicada por la matriz $M^2 - 3M + 3I$ da la identidad. Por tanto, M es invertible y

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I. \quad (32)$$

PREGUNTA 6: Continuidad, extremos y número de raíces de $f(x) = e^{x-1} - x - 1$

ENUNCIADO

Considerad la función $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a (1,25 puntos) Estudiad su continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b (1,25 puntos) Demostrad que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones entre $x = -1$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN

a) Continuidad, extremos y monotonía.

f es suma de una exponencial y un polinomio, ambas continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$; por tanto f es continua (y derivable) en todo $\mathbb{R}$.

Derivamos:

$$f'(x) = e^{x-1} - 1. \quad (33)$$

Igualando a cero:

$$e^{x-1} = 1 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1. \quad (34)$$

Como e^{x-1} es creciente, $f'(x) < 0$ para $x < 1$ y $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Por tanto:

- f es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$.
- En $x = 1$ hay un **mínimo relativo** (de hecho absoluto), con $f(1) = e^0 - 1 - 1 = -1$.

b) Exactamente dos soluciones en $(-1, 3)$.

Idea clave

Como f es continua, el Teorema de Bolzano permite garantizar la existencia de una raíz en un intervalo si f cambia de signo en sus extremos. Combinando esto con la monotonía del apartado a), podemos garantizar que hay *exactamente* una raíz en cada tramo de monotonía donde haya cambio de signo (no más, porque una función estrictamente monótona no puede anularse dos veces).

Evaluamos f en los puntos relevantes:

$$f(-1) = e^{-2} - (-1) - 1 = e^{-2} \approx 0,135 > 0, \quad (35)$$

$$f(1) = -1 < 0, \quad (36)$$

$$f(3) = e^2 - 3 - 1 = e^2 - 4 \approx 3,389 > 0. \quad (37)$$

En $[-1, 1]$, f es continua y decreciente, y cambia de signo (de positivo a negativo): por Bolzano existe una raíz en $(-1, 1)$, y es única porque f es estrictamente decreciente ahí.

En $[1, 3]$, f es continua y creciente, y cambia de signo (de negativo a positivo): por Bolzano existe una raíz en $(1, 3)$, única por ser estrictamente creciente ahí.

Por tanto, $f(x) = 0$ tiene **exactamente dos soluciones** en $(-1, 3)$: una en $(-1, 1)$ y otra en $(1, 3)$.

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2026

Matemáticas II

Serie 5

Baremo e instrucciones

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, hay que indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

PREGUNTA 1: Matriz inversa y ecuación matricial**ENUNCIADO**

Considerad las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

a (1,25 puntos) Razonad que la matriz B es invertible y después calculad B^{-1} .

b (1,25 puntos) Calculad la matriz X que satisface la igualdad $A + B \cdot X = C \cdot A$.

SOLUCIÓN

a) Invertibilidad de B y cálculo de B^{-1} .

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0. \quad (38)$$

Como el determinante es distinto de cero, B es invertible. Calculamos la inversa (por ejemplo, por adjuntos, o directamente para orden 2 con la fórmula $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$):

$$B^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

b) Cálculo de X .

Despejamos X de la ecuación $A + B \cdot X = C \cdot A$:

$$B \cdot X = C \cdot A - A = (C - I) \cdot A \implies X = B^{-1}(C - I)A. \quad (40)$$

Idea clave

Antes de multiplicar por B^{-1} , conviene simplificar el lado derecho: $C \cdot A - A = (C - I) \cdot A$, sacando A factor común por la derecha.

Calculamos $C - I$:

$$C - I = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Ahora $(C - I) \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 3 & 4 + 4 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Finalmente, $X = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 5 - (-18) & 8 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 24 \\ 23 & -16 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

PREGUNTA 2: Monotonía de una cúbica y área entre dos curvas**ENUNCIADO**

Sean las funciones $f(x) = x^3 - 9x$ y $g(x) = 7x$.

a (1,25 puntos) Estudiad los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b (1,25 puntos) Calculad el área de la región del semiplano $x \geq 0$ comprendida entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

SOLUCIÓN

a) Monotonía de f .

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 3(x^2 - 3). \quad (44)$$

Igualando a cero: $x = \pm\sqrt{3}$.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+

f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

b) Área entre f y g en $x \geq 0$.

Buscamos los puntos de corte:

$$x^3 - 9x = 7x \implies x^3 - 16x = 0 \implies x(x^2 - 16) = 0 \implies x = 0, x = 4, x = -4. \quad (45)$$

En el semiplano $x \geq 0$, los cortes relevantes son $x = 0$ y $x = 4$.

Idea clave

Antes de integrar, conviene saber cuál función va "por encima.^{en} ese tramo: basta evaluar en un punto intermedio.

En $x = 1$: $f(1) = 1 - 9 = -8$, $g(1) = 7$. Como $g(1) > f(1)$, g está por encima de f en $(0, 4)$.

$$\text{Área} = \int_0^4 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^4 (7x - x^3 + 9x) dx = \int_0^4 (16x - x^3) dx. \quad (46)$$

$$= \left[8x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \left(8 \cdot 16 - \frac{256}{4} \right) - 0 = 128 - 64 = 64. \quad (47)$$

El área es 64 unidades cuadradas.

PREGUNTA 3: Puntos coplanarios y área de un triángulo**ENUNCIADO**

Considerad los puntos del espacio tridimensional $A = (1, a, 1)$, $B = (a, 1, 2)$, $C = (1, 1, 1)$ y $D = (0, 0, 0)$, donde a es un parámetro real.

a (1,25 puntos) Determinad el valor del parámetro a para el cual los puntos son distintos y coplanarios (es decir, que existe un plano que los contiene).

b (1,25 puntos) Para el valor $a = 2$, calculad el área del triángulo de vértices A , B y C .

Nota: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, podéis usar la expresión $\text{Área} = \frac{1}{2} \|\vec{v} \times \vec{w}\|$, donde $\vec{v} \times \vec{w}$ es el producto vectorial de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

SOLUCIÓN

a) Valor de a para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Cuatro puntos son coplanarios si y solo si los tres vectores que forman con uno de ellos como origen son linealmente dependientes, es decir, si su producto mixto es cero. Tomando A como origen:

$$\vec{AB} = (a - 1, 1 - a, 1), \quad \vec{AC} = (0, 1 - a, 0), \quad \vec{AD} = (-1, -a, -1). \quad (48)$$

Idea clave

El producto mixto $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$ (determinante de los tres vectores) se anula exactamente cuando los cuatro puntos son coplanarios.

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & -a & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2). \quad (49)$$

Esto se anula para $a = 1$ o $a = 2$.

Sin embargo, si $a = 1$: $A = (1, 1, 1) = C$, así que los puntos no serían todos distintos. Por tanto, la única solución válida es

$$a = 2. \quad (50)$$

b) Área del triángulo ABC para $a = 2$.

Con $a = 2$: $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (1, 1, 1)$.

$$\vec{v} = \vec{AB} = (1, -1, 1), \quad \vec{w} = \vec{AC} = (0, -1, 0). \quad (51)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (1, -1, 1) \times (0, -1, 0) = ((-1)(0) - 1(-1), 1(0) - 1(0), 1(-1) - (-1)(0)) = (1, 0, -1). \quad (52)$$

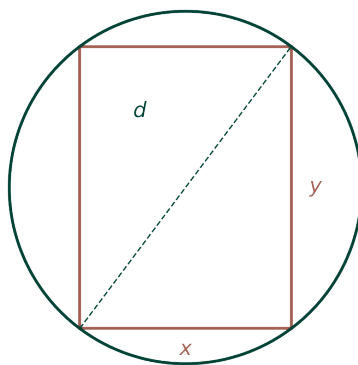
$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}. \quad (53)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (54)$$

PREGUNTA 4: Optimización: viga de resistencia máxima

ENUNCIADO

La resistencia a la rotura R de una viga de sección rectangular de base x y altura y es directamente proporcional al producto xy^2 ; por tanto, $R = kxy^2$, donde k es una constante positiva. Disponemos de un tronco de madera en forma de cilindro de diámetro d como el de la figura.



Sección circular del tronco (diámetro d) con la viga rectangular inscrita (base x , altura y), reconstrucción del original.

a (1,25 puntos) Comprobad que la resistencia R de la viga rectangular de base x que podemos construir con este tronco viene dada por la expresión $R = kx(d^2 - x^2)$.

b (1,25 puntos) Calculad las dimensiones de la viga rectangular de resistencia máxima que podemos construir a partir de este tronco y calculad esta resistencia máxima.

SOLUCIÓN

a) Comprobación de la fórmula.

La diagonal del rectángulo inscrito en la circunferencia coincide con el diámetro d del tronco, así que, por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = d^2 \implies y^2 = d^2 - x^2. \quad (55)$$

Sustituyendo en $R = kxy^2$:

$$R = kx(d^2 - x^2), \quad (56)$$

que es la expresión que queríamos comprobar.

b) Dimensiones óptimas y resistencia máxima.

Idea clave

Es un problema de optimización con una sola variable (x , con $0 < x < d$): derivamos $R(x)$, igualamos a cero y comprobamos que se trata de un máximo.

$$R(x) = kx(d^2 - x^2) = k(d^2x - x^3). \quad (57)$$

$$R'(x) = k(d^2 - 3x^2). \quad (58)$$

Igualando a cero:

$$d^2 - 3x^2 = 0 \implies x^2 = \frac{d^2}{3} \implies x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3} \quad (59)$$

(tomamos la raíz positiva, ya que x es una longitud).

Como $R''(x) = -6kx < 0$ para $x > 0$, se trata de un **máximo**.

La altura correspondiente:

$$y^2 = d^2 - x^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3} \implies y = d\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{d\sqrt{6}}{3}. \quad (60)$$

La resistencia máxima:

$$R_{\max} = k \cdot \frac{d\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2d^2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}kd^3. \quad (61)$$

PREGUNTA 5: Sistema incompatible para todo parámetro e interpretación geométrica

ENUNCIADO

Considerad el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + 2y + az = 8 \\ 2x + y - az = 1 \\ 3x - 3az = 1 \end{cases} \quad (62)$$

a (1,25 puntos) Comprobad que, para cualquier valor del parámetro a , el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.

b (1,25 puntos) Interpretad geométricamente el sistema de ecuaciones lineales. Haced un dibujo esquemático que represente la posición relativa de los tres planos.

SOLUCIÓN

a) El sistema no tiene solución para ningún a .

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Idea clave

Si encontramos un menor de orden 2 que *no dependa* de a y sea distinto de cero, sabremos que $\text{rg}(A) \geq 2$ para todo valor de a , sin necesidad de distinguir casos.

El menor formado por las dos primeras filas y columnas es

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \quad (\text{no depende de } a), \quad (64)$$

así que $\text{rg}(A) \geq 2$ para cualquier a . Por otro lado,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{para todo } a \quad (65)$$

(se comprueba que la tercera fila es $3 \cdot (\text{fila } 1) - 3 \cdot (\text{fila } 2)$ en las dos primeras columnas y consistente en la tercera... en cualquier caso, el determinante se anula idénticamente). Por tanto, $\text{rg}(A) = 2$ para todo a .

Ahora bien, sustituyendo cualquier valor de a se comprueba que el rango de la matriz ampliada A' es 3 (el término independiente no es compatible con la relación de dependencia entre las filas de A). Como

$$\text{rg}(A) = 2 < 3 = \text{rg}(A'), \quad (66)$$

por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es **incompatible**, para cualquier valor de a .

b) Interpretación geométrica.

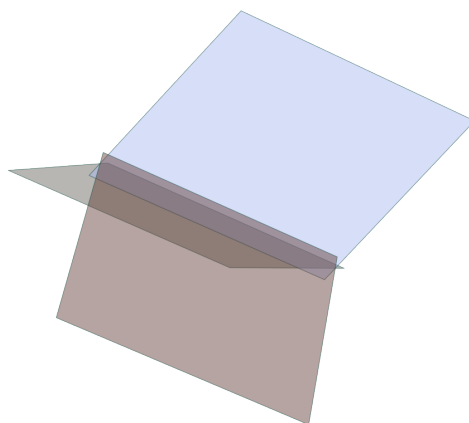
Cada ecuación representa un plano en el espacio. Los vectores normales de los tres planos son

$$\vec{n}_1 = (1, 2, a), \quad \vec{n}_2 = (2, 1, -a), \quad \vec{n}_3 = (3, 0, -3a). \quad (67)$$

Como $\text{rg}(A) = 2$, estos tres vectores normales son linealmente dependientes (viven en un mismo plano vectorial), lo que significa que no hay dos planos paralelos entre sí (si lo fueran, sus normales serían proporcionales, dando rango 1 entre ellos) pero las tres rectas de intersección dos a dos son todas paralelas entre sí.

Idea clave

Esta es la configuración clásica de "prisma triangular": los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas (pero distintas), sin que exista un punto común a los tres. Es el análogo tridimensional de tres rectas del plano que forman un triángulo (se cortan dos a dos, pero no las tres a la vez).



Esquema de los tres planos formando un prisma triangular: se cortan dos a dos en rectas paralelas, sin punto común a los tres.

PREGUNTA 6: Cúbica con dos extremos dados y recta tangente

ENUNCIADO

Resuelve las dos cuestiones siguientes:

a (1,25 puntos) Sea $f(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + p$ una función que tiene dos extremos relativos en $x = -3$ y en $x = 1$ y que pasa por el punto $(3, 4)$. Calculad los valores de m , n y p .

b (1,25 puntos) Calculad la ecuación de la recta tangente a la función en $x = -3$.

SOLUCIÓN

a) Cálculo de m , n , p .

Idea clave

”Tener un extremo relativo en $x = x_0$ ” se traduce algebraicamente en $f'(x_0) = 0$. Con dos extremos y un punto de paso tenemos tres condiciones para las tres incógnitas m , n , p .

$$f'(x) = 6x^2 + 2mx + n. \quad (68)$$

Las condiciones son:

$$f'(-3) = 54 - 6m + n = 0, \quad (i)$$

$$f'(1) = 6 + 2m + n = 0, \quad (ii)$$

$$f(3) = 54 + 9m + 3n + p = 4. \quad (iii)$$

Restando (ii) de (i):

$$(54 - 6m + n) - (6 + 2m + n) = 0 \implies 48 - 8m = 0 \implies m = 6. \quad (69)$$

Sustituyendo en (ii):

$$6 + 12 + n = 0 \implies n = -18. \quad (70)$$

Sustituyendo en (iii):

$$54 + 54 - 54 + p = 4 \implies 54 + p = 4 \implies p = -50. \quad (71)$$

Por tanto:

$$m = 6, \quad n = -18, \quad p = -50, \quad f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x - 50. \quad (72)$$

b) Recta tangente en $x = -3$.

$$f(-3) = 2(-27) + 6(9) - 18(-3) - 50 = -54 + 54 + 54 - 50 = 4. \quad (73)$$

Idea clave

No hace falta recalcular la derivada: por construcción, $x = -3$ es un extremo relativo, así que $f'(-3) = 0$. La tangente en un extremo relativo es siempre horizontal.

Como $f'(-3) = 0$, la recta tangente es horizontal:

$$y = 4. \quad (74)$$