

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2025

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Cada pregunta puntúa hasta 2,5 puntos. La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto.

Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40 % de sus clientes piden pizza margarita, el 25 % elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0.25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

SOLUCIÓN

Sean M , V , P los sucesos «pide margarita / vegetariana / pepperoni», con $P(M) = 0.40$ y $P(V) = 0.25$.

Como las tres opciones agotan los casos posibles, $P(P) = 1 - 0.40 - 0.25 = 0.35$.

1.1 (0.25 puntos)

Directamente, $P(P) = 0.35$.

1.2 (0.75 puntos)

Es más sencillo calcular primero la probabilidad de que *coincidan* (pidan el mismo tipo) y restar a 1:

$$P(\text{coinciden}) = P(M)^2 + P(V)^2 + P(P)^2 = 0.40^2 + 0.25^2 + 0.35^2 = 0.16 + 0.0625 + 0.1225 = 0.345.$$

$$P(\text{distintos}) = 1 - 0.345 = 0.655.$$

Idea clave

Contar directamente «tipos distintos» exigiría sumar $3 \times 2 = 6$ combinaciones ordenadas cruzadas; es mucho más rápido calcular el complementario (ambos piden lo mismo), que solo tiene 3 casos.

1.3 (0.75 puntos)

Sea X = número de clientes, de 10, que piden margarita; $X \sim B(10, 0.40)$. Buscamos $P(X = 4) = F(4) - F(3)$. Leyendo la tabla adjunta (fila $n = 10$, columna $p = 0.40$):

$$P(X = 4) = F(4) - F(3) = 0.6331 - 0.3823 = 0.2508.$$

1.4 (0.75 puntos)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - F(0) = 1 - 0.0060 = 0.9940.$$

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2.5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

Opción 2.1**ENUNCIADO**

En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

2.1.1 (1.25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores de α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 (1.25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

SOLUCIÓN

2.1.1 (1.25 puntos)

Calculamos A^2 por bloques (la matriz es triangular superior, así que basta multiplicar fila por columna):

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^2 + \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}.$$

Igualando $A^2 = A$ entrada a entrada:

$$(1,2): \alpha^2 + \alpha = \alpha \implies \alpha^2 = 0 \implies \alpha = 0.$$

Idea clave

Esta única entrada ya obliga a $\alpha = 0$: no hace falta ni mirar las demás para descartar otras posibilidades, porque $\alpha^2 = 0$ solo tiene la solución real $\alpha = 0$.

Comprobamos que $\alpha = 0$ también cumple el resto de entradas: $(2,2): \alpha^2 = \alpha \implies 0 = 0 \checkmark$; $(3,3): (1 - \alpha)^2 = 1 - \alpha \implies 1 = 1 \checkmark$. Por tanto, el único valor que hace a A idempotente es $\boxed{\alpha = 0}$.

2.1.2 (1.25 puntos)

Como A es triangular, su determinante es el producto de la diagonal:

$$|A| = 1 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha).$$

Existe inversa cuando $|A| \neq 0$, es decir, para $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$. En ese caso:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \alpha} \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Se puede comprobar rápido sin calcular el determinante completo por Gauss: al ser triangular, basta con que ningún elemento de la diagonal $(1, \alpha, 1 - \alpha)$ sea cero.

Opción 2.2**ENUNCIADO**

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases},$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 (0.75 puntos) Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

SOLUCIÓN

2.2.1 (1 punto)

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante (por ejemplo, desarrollando por la primera fila o por Sarrus):

$$|M| = 9(a + 3).$$

Si $a \neq -3$: $|M| \neq 0$, $rg(M) = rg(M') = 3 = n$. SCD: solución única.

Si $a = -3$: se comprueba que $rg(M) = rg(M') = 2 < 3$ (la tercera ecuación resulta combinación de las otras dos, tanto en los coeficientes como en el término independiente). SCI: infinitas soluciones (un grado de libertad).

2.2.2 (0.75 puntos)

Para $a = -3$, resolvemos por Gauss (o sustitución) tomando z como parámetro libre:

$$x = \frac{6 - z}{5}, \quad y = \frac{9(1 - z)}{5}, \quad z = z, \quad z \in \mathbb{R}.$$

2.2.3 (0.75 puntos)

Para $a = 0$ (que no anula $|M|$, pues $a \neq -3$), el sistema es compatible determinado. Resolviendo:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

se obtiene la solución

$$(x, y, z) = (1, 0, 1).$$

Idea clave

Curiosamente, $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ verifica el sistema para **cualquier** valor de a (con $y = 0$, el término ay se anula, así que a no interviene). Cuando el sistema es SCD, esta es la única solución; con $a = 0$ simplemente lo confirmamos.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2.5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

Opción 3.1

ENUNCIADO

Dada la recta $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s : \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 (0.5 puntos) La distancia del punto $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano.

SOLUCIÓN

La recta s (intersección de los dos planos dados) se puede parametrizar: de $x = -1$ y $x + 2y + z = 0$ se obtiene $z = 1 - 2y$; tomando $y = \mu$ como parámetro, $s : (x, y, z) = (-1, \mu, 1 - 2\mu)$, con vector director $\vec{d}_s = (0, 1, -2)$.

3.1.1 (1 punto)

Igualamos las coordenadas de r y s :

$$1 + 2\lambda = -1, \quad \lambda = \mu, \quad 2 - \lambda = 1 - 2\mu.$$

De la primera: $\lambda = -1$. Entonces $\mu = -1$. Comprobamos la tercera: $2 - (-1) = 3$ y $1 - 2(-1) = 3$ ✓, coherente. El punto de corte es

$$(x, y, z) = (1 + 2(-1), -1, 2 - (-1)) = (-1, -1, 3).$$

3.1.2 (1 punto)

Como las rectas se cortan, el plano que las contiene está generado por sus vectores directores $\vec{d}_r = (2, 1, -1)$ y $\vec{d}_s = (0, 1, -2)$, pasando por el punto común $(-1, -1, 3)$. El vector normal es

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (2, 1, -1) \times (0, 1, -2) = (-1, 4, 2).$$

Imponiendo que pase por $(-1, -1, 3)$:

$$-1(x + 1) + 4(y + 1) + 2(z - 3) = 0 \implies -x + 4y + 2z - 3 = 0, \quad \text{o bien} \quad x - 4y - 2z + 3 = 0.$$

3.1.3 (0.5 puntos)

Idea clave

Antes de aplicar la fórmula de distancia punto-plano, fíjate en que $P = (1, 0, 2)$ es justo el punto de r correspondiente a $\lambda = 0$: por tanto P pertenece a r , y como r está contenida en el plano hallado, P también está en el plano.

Comprobamos sustituyendo en la ecuación del plano: $1 - 4(0) - 2(2) + 3 = 1 - 0 - 4 + 3 = 0$. En efecto, P pertenece al plano, así que

$$d(P, \text{plano}) = 0.$$

Opción 3.2**ENUNCIADO**

Se consideran el plano $\pi : 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto al plano π .

SOLUCIÓN**3.2.1 (1 punto)**

El plano buscado debe contener el vector $\vec{PQ} = (3, 1, 1)$ y ser perpendicular a π (es decir, su normal debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi = (3, -1, 2)$). Por tanto, su normal es

$$\vec{n} = \vec{n}_\pi \times \vec{PQ} = (3, -1, 2) \times (3, 1, 1) = (-3, 3, 6).$$

Simplificando (dividiendo por 3): $\vec{n} = (-1, 1, 2)$. Imponiendo que pase por $P(-1, 0, 1)$:

$$-1(x + 1) + 1(y - 0) + 2(z - 1) = 0 \implies -x + y + 2z - 3 = 0, \quad \text{o bien} \quad x - y - 2z + 3 = 0.$$

(Se comprueba que $Q(2, 1, 2)$ también lo verifica: $2 - 1 - 4 + 3 = 0$ ✓.)

3.2.2 (0.5 puntos)

$$d(Q, \pi) = \frac{|3(2) - 1 + 2(2) - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|6 - 1 + 4 - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{14}.$$

3.2.3 (1 punto)

Para el simétrico de P respecto a π , hallamos primero el pie de la perpendicular M (proyección de P sobre π) y luego $P' = 2M - P$. Usamos la fórmula directa:

$$P' = P - 2 \frac{\vec{n}_\pi \cdot P - 4}{|\vec{n}_\pi|^2} \vec{n}_\pi.$$

Calculamos $\vec{n}_\pi \cdot P = 3(-1) - 0 + 2(1) = -1$, luego $\vec{n}_\pi \cdot P - 4 = -5$, y $|\vec{n}_\pi|^2 = 14$:

$$P' = (-1, 0, 1) - 2 \cdot \frac{-5}{14} (3, -1, 2) = (-1, 0, 1) + \frac{5}{7} (3, -1, 2) = \left(\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{17}{7} \right).$$

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

Opción 4.1**ENUNCIADO**

Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en

una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25 % más caro. Obtener:

4.1.1 (0.75 puntos) La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

4.1.2 (1.25 puntos) Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 (0.5 puntos) El precio del material en el caso anterior.

SOLUCIÓN

4.1.1 (0.75 puntos)

Si el lado de la base es x y la altura h , el volumen es $x^2h = 80$, luego $h = \frac{80}{x^2}$.

El área lateral (4 caras rectangulares de $x \times h$) es $4xh$, con precio 1 céntimo/ cm^2 . El área de base y tapa (2 cuadrados de lado x) es $2x^2$, con precio 1.25 céntimos/ cm^2 (un 25 % más caro). Así:

$$P(x) = 4xh \cdot 1 + 2x^2 \cdot 1.25 = 4xh + 2.5x^2.$$

Sustituyendo $h = \frac{80}{x^2}$:

$$P(x) = 4x \cdot \frac{80}{x^2} + 2.5x^2 = \frac{320}{x} + 2.5x^2, \quad x > 0.$$

4.1.2 (1.25 puntos)

Derivamos e igualamos a cero:

$$P'(x) = -\frac{320}{x^2} + 5x = 0 \implies 5x^3 = 320 \implies x^3 = 64 \implies x = 4.$$

Comprobamos que es un mínimo: $P''(x) = \frac{640}{x^3} + 5 > 0$ para todo $x > 0$, así que $x = 4$ es efectivamente un mínimo.

Con $x = 4$: $h = \frac{80}{16} = 5$. Las dimensiones óptimas son **base $4 \times 4 \text{ cm}$ y altura 5 cm** .

4.1.3 (0.5 puntos)

$$P(4) = \frac{320}{4} + 2.5(16) = 80 + 40 = 120 \text{ céntimos} = 1.20 \text{ €}.$$

Opción 4.2

ENUNCIADO

Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|.$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

SOLUCIÓN

4.2.1 (1 punto)

Quitamos el valor absoluto según el signo de $x - 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Idea clave

Cada tramo es una parábola: $2x - x^2$ (invertida, con vértice en $x = 1$, $f(1) = 1$) y $x^2 - 2x$ (normal, con vértice en $x = 1$ también, pero fuera del tramo donde se usa). Ambas coinciden y valen 0 en $x = 0$ y $x = 2$, así que la gráfica se pega sin saltos ahí.

Continuidad en $x = 2$ (punto de unión): $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - x^2) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x) = 0$, y además $f(2) = 2 \cdot |0| = 0$.

Los tres valores coinciden, así que f es continua en $x = 2$ (y, por construcción con $|\cdot|$, en todo $\mathbb{R}$).

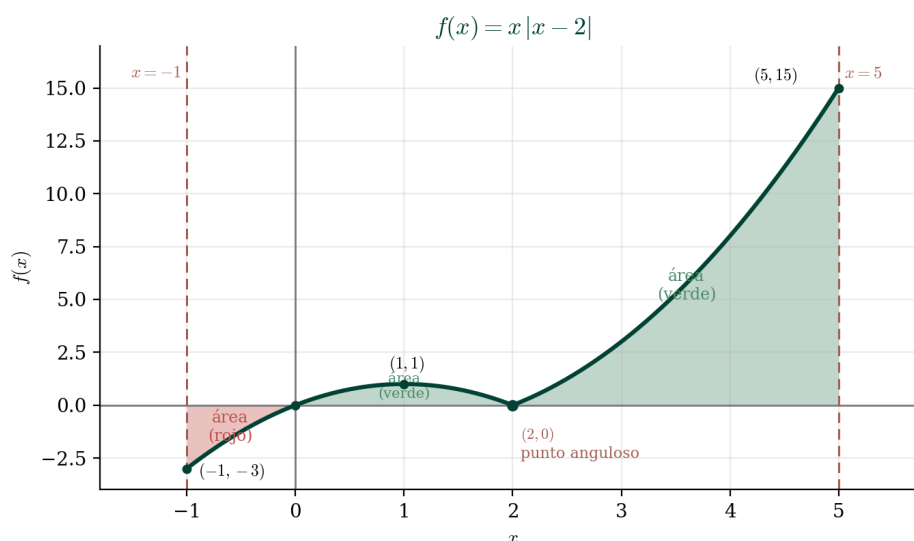
Derivabilidad en $x = 2$: derivamos cada tramo y evaluamos las derivadas laterales:

$$f'_-(2) = (2 - 2x)|_{x=2} = -2, \quad f'_+(2) = (2x - 2)|_{x=2} = 2.$$

Como $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, la función **no es derivable en $x = 2$** : presenta un **punto anguloso** en $(2, 0)$ (igual que le ocurre a $y = |x|$ en el origen).

Puntos clave para la representación: $f(-1) = (-1)|-3| = -3$; $f(0) = 0$; $f(1) = 1$ (máximo del primer tramo, ya que $f'(x) = 2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$); $f(2) = 0$ (punto anguloso); $f(3) = 3$; $f(5) = 15$.

Así, en $[-1, 0]$ la curva está **por debajo** del eje X (llega a -3 en $x = -1$); en $[0, 2]$ forma un pequeño arco **por encima** del eje (hasta 1); y en $[2, 5]$ crece de 0 a 15, también por encima del eje, sin suavizar el ángulo en $(2, 0)$:



4.2.2 (1.5 puntos)

Idea clave

Recuerda la diferencia entre integral y área: la integral definida da un *área con signo* (negativa donde la curva está por debajo del eje X), mientras que el área geométrica siempre es positiva. El procedimiento correcto es: (1) localizar los puntos donde $f(x) = 0$, (2) dividir el intervalo en tramos de signo constante, (3) integrar cada tramo, y (4) sumar los valores absolutos.

Las raíces de f en $[-1, 5]$ son $x = 0$ y $x = 2$ (vistas en el apartado anterior), que dividen el intervalo en $[-1, 0]$, $[0, 2]$ y $[2, 5]$. Integramos cada tramo con su expresión correspondiente:

$$\int_{-1}^0 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{4}{3}.$$

$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

$$\int_2^5 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^5 = \left(\frac{125}{3} - 25 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{50}{3} + \frac{4}{3} = 18.$$

El primer resultado es negativo (coherente con que la curva está bajo el eje en $[-1, 0]$); los otros dos son positivos. El área geométrica es la suma de los **valores absolutos**:

$$\text{Área} = \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3} \right| + |18| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + 18 = \frac{8}{3} + 18 = \frac{62}{3} \approx 20.67 \text{ u}^2.$$