

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Andalucía -- Ordinaria 2024

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad y Pruebas de Admisión – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Curso 2023–2024.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- e) Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde $\ln$ denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.

- a) [1,5 puntos] Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B .
- b) [1 punto] Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en un punto x_0 es $f'(x_0)$; la pendiente de la recta AB se calcula con la fórmula habitual $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

La pendiente de la recta que pasa por $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$ es:

$$m_{AB} = \frac{1 - 0}{e - 1} = \frac{1}{e - 1}.$$

La derivada de f es $f'(x) = \frac{1}{x}$. Buscamos los puntos donde la tangente tiene esta misma pendiente:

$$f'(x) = m_{AB} \implies \frac{1}{x} = \frac{1}{e - 1} \implies x = e - 1.$$

Como $e - 1 \approx 1,718 > 0$, este valor pertenece al dominio de f . El punto correspondiente es:

$$(e - 1, \ln(e - 1)).$$

Existe un único punto en el que la tangente es paralela a AB : $(e - 1, \ln(e - 1))$.

Apartado b)

Calculamos la pendiente de la tangente en $A(1, 0)$:

$$f'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Idea clave

La recta normal a una gráfica en un punto es perpendicular a la tangente en ese punto. Si la tangente tiene pendiente m , la normal tiene pendiente $-\frac{1}{m}$ (siempre que $m \neq 0$).

La pendiente de la tangente es 1, así que la pendiente de la normal es $-\frac{1}{1} = -1$.

La recta normal pasa por $A(1, 0)$ con pendiente -1 :

$$y - 0 = -1(x - 1) \implies y = -x + 1.$$

La recta normal a la gráfica de f en A es $y = -x + 1$ (equivalentemente, $x + y - 1 = 0$).

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - a \sin(x)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b .

SOLUCIÓN

Idea clave

Para que f sea continua en $x = 0$, el límite por la izquierda debe existir, ser finito, y coincidir con $f(0)$ (el valor de la rama de la derecha en ese punto). La rama de la izquierda presenta una indeterminación $\frac{0}{0}$ en $x = 0$, así que necesitaremos L'Hôpital para resolverla.

Calculamos primero $f(0)$ usando la rama $x \geq 0$:

$$f(0) = b \cos(0) - 1 = b - 1.$$

Ahora estudiamos el límite por la izquierda. Llamamos $N(x) = x \cos(x) - a \sin(x)$ y $D(x) = x^3$.

Sustituyendo $x = 0$: $N(0) = 0 - 0 = 0$, $D(0) = 0$. Aparece $\frac{0}{0}$, para cualquier valor de a . Aplicamos L'Hôpital:

$$N'(x) = \cos(x) - x \sin(x) - a \cos(x) = (1 - a) \cos(x) - x \sin(x), \quad D'(x) = 3x^2.$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$N'(0) = (1 - a)(1) - 0 = 1 - a, \quad D'(0) = 0.$$

Idea clave

De nuevo el denominador de las derivadas se anula en $x = 0$. Para que el límite sea finito, el numerador de las derivadas también debe anularse en ese punto.

Imponemos $N'(0) = 0$:

$$1 - a = 0 \implies a = 1.$$

Con $a = 1$, comprobamos que seguimos en $\frac{0}{0}$ (ya que $N'(0) = D'(0) = 0$), así que aplicamos L'Hôpital una segunda vez:

$$N''(x) = -(1 - a) \sin(x) - \sin(x) - x \cos(x) = -\sin(x) - x \cos(x) \quad (\text{con } a = 1),$$

$$D''(x) = 6x.$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$N''(0) = 0 - 0 = 0, \quad D''(0) = 0.$$

Persiste $\frac{0}{0}$: aplicamos L'Hôpital una tercera vez:

$$N'''(x) = -\cos(x) - [\cos(x) - x \sin(x)] = -2 \cos(x) + x \sin(x), \quad D'''(x) = 6.$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$N'''(0) = -2(1) + 0 = -2, \quad D'''(0) = 6.$$

Como $D'''(0) = 6 \neq 0$, ya podemos calcular el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{N'''(0)}{D'''(0)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Igualemos este límite a $f(0) = b - 1$ (condición de continuidad):

$$-\frac{1}{3} = b - 1 \implies b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Los valores pedidos son $a = 1$ y $b = \frac{2}{3}$.

BLOQUE B

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$.

SOLUCIÓN

Idea clave

Como el grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (2), lo primero es dividir los polinomios para separar la parte entera de la fracción propia, que sí podremos descomponer en fracciones simples.

Dividimos $x^3 + 2$ entre $x^2 - 1$:

$$x^3 + 2 = x(x^2 - 1) + (x + 2),$$

de donde:

$$f(x) = x + \frac{x + 2}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)}.$$

Descomponemos la fracción propia en fracciones simples:

$$\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}.$$

Multiplicando por $(x - 1)(x + 1)$:

$$x + 2 = A(x + 1) + B(x - 1).$$

Evaluando en $x = 1$: $3 = 2A \implies A = \frac{3}{2}$. Evaluando en $x = -1$: $1 = -2B \implies B = -\frac{1}{2}$.

Por tanto:

$$f(x) = x + \frac{3/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1}.$$

Integrando término a término:

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C.$$

Imponemos que la gráfica pase por (0, 1):

$$F(0) = 0 + \frac{3}{2} \ln|-1| - \frac{1}{2} \ln|1| + C = \frac{3}{2}(0) - \frac{1}{2}(0) + C = C.$$

Igualamos a 1: $C = 1$.

La primitiva pedida es $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + 1$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Halla la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x \cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$.

SOLUCIÓN

Idea clave

Como conocemos f'' , hay que integrar dos veces, y cada integración introduce una constante distinta (C_1 y C_2). Los dos puntos dados son los dos datos necesarios para determinarlas.

Primera integración: de f'' a f' . Integramos $x \cos(x)$ por partes, con $u = x$ ($du = dx$) y $dv = \cos(x) dx$ ($v = \sin(x)$):

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C_1.$$

Así:

$$f'(x) = x \sin(x) + \cos(x) + C_1.$$

Segunda integración: de f' a f . Integramos cada término. Para $x \sin(x)$, de nuevo por partes, con $u = x$ ($du = dx$) y $dv = \sin(x) dx$ ($v = -\cos(x)$):

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x).$$

Y $\int \cos(x) dx = \sin(x)$. Sumando:

$$f(x) = (-x \cos(x) + \sin(x)) + \sin(x) + C_1 x + C_2 = -x \cos(x) + 2 \sin(x) + C_1 x + C_2.$$

Imponemos las dos condiciones.

$$f(0) = \frac{\pi}{2}:$$

$$f(0) = -0(1) + 2(0) + C_1(0) + C_2 = C_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$f(\pi) = 2\pi:$$

$$f(\pi) = -\pi \cos(\pi) + 2 \sin(\pi) + C_1\pi + C_2 = -\pi(-1) + 0 + C_1\pi + \frac{\pi}{2} = \pi + C_1\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Igualemos a 2π :

$$\pi + C_1\pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi \implies C_1\pi = 2\pi - \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \implies C_1 = \frac{1}{2}.$$

La función pedida es $f(x) = -x \cos(x) + 2 \sin(x) + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$.

BLOQUE C

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Calcula A^{2024} .

b) [1,5 puntos] Halla la matriz X , si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

En vez de multiplicar A por sí misma 2024 veces, conviene escribir $A = I + N$, donde N es la parte que sobra de la identidad. Si N resulta ser nilpotente (alguna potencia de N es la matriz nula), el binomio de Newton se trunca y A^n se calcula de forma inmediata.

Escribimos $A = I + N$, con:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos N^2 : como las filas 2.^a y 3.^a de N son nulas, al multiplicar $N \cdot N$ cada entrada de la fila 1 del resultado se obtiene combinando la fila 1 de N con las columnas de N , pero solo la primera entrada de cada columna de N es no nula, y esa entrada multiplica a $N_{11} = 0$:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Como N y I conmutan (cualquier matriz conmuta con la identidad), podemos aplicar el binomio de

Newton a $A^n = (I + N)^n$:

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} N^k = I + nN + \binom{n}{2} N^2 + \dots = I + nN,$$

ya que $N^2 = O$ anula todos los términos con $k \geq 2$.

Idea clave

Este es un atajo muy útil: siempre que $A = I + N$ con $N^2 = O$, se cumple $A^n = I + nN$ para cualquier natural n , sin necesidad de calcular ninguna potencia intermedia.

Por tanto:

$$A^{2024} = I + 2024N = \begin{pmatrix} 1 & 2024/8 & 2024/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apartado b)

Despejamos X de la ecuación $A^2XA + I = O$:

$$A^2XA = -I.$$

Idea clave

Como A es invertible (su determinante es $1 \neq 0$, al ser triangular con unos en la diagonal), podemos multiplicar por $(A^2)^{-1} = A^{-2}$ por la izquierda y por A^{-1} por la derecha para despejar X directamente.

$$X = A^{-2}(-I)A^{-1} = -A^{-2}A^{-1} = -A^{-3}.$$

Como $A = I + N$ con $N^2 = O$, su inversa es $A^{-1} = I - N$ (comprobación: $(I + N)(I - N) = I - N^2 = I$).

Idea clave

Igual que antes, podemos usar el mismo atajo del binomio truncado para calcular $A^{-3} = (I - N)^3$, ya que $(-N)^2 = N^2 = O$ también anula los términos de orden 2 o superior.

$$A^{-3} = (I - N)^3 = I - 3N + 3N^2 - N^3 = I - 3N.$$

Por tanto:

$$X = -A^{-3} = -(I - 3N) = -I + 3N = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz pedida es $X = \begin{pmatrix} -1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera el sistema

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de k .

b) [0,75 puntos] Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera fila:

$$|A| = 0 \cdot (...) - 1 \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada menor:

$$\begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1) - 1 = k-2, \quad \begin{vmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)^2 - 1.$$

Sustituyendo:

$$|A| = -(k-2) + [(k-1)^2 - 1] = -k + 2 + k^2 - 2k + 1 - 1 = k^2 - 3k + 2.$$

Factorizamos:

$$|A| = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2).$$

Igualamos a cero: $k = 1$ o $k = 2$.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$: $|A| \neq 0$, luego el sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Caso $k = 1$: el sistema queda

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

La primera y la segunda ecuación son idénticas: $\text{rg}(A) = 2$ (la primera fila de A , $(0, 1, 1)$, coincide con la segunda). Comprobamos la matriz ampliada: al ser las dos primeras ecuaciones idénticas también en el término independiente, $\text{rg}(A') = 2$ también. Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 2 < 3$, el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**.

Caso $k = 2$: el sistema queda

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones 2.^a y 3.^a tienen la misma parte izquierda ($x + y + z$) pero términos independientes distintos ($2 \neq 0$): son incompatibles entre sí. Por tanto $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A') = 3$: el sistema es **incompatible (SI)**.

Valor de k	Tipo de sistema
$k \neq 1, k \neq 2$	Compatible determinado (SCD)
$k = 1$	Compatible indeterminado (SCI)
$k = 2$	Incompatible (SI)

Apartado b)

Para $k = 1$ (según el apartado anterior, SCI), el sistema se reduce a dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Idea clave

Al ser compatible indeterminado con $\text{rg} = 2$ en un sistema de 3 incógnitas, queda 1 grado de libertad: tomamos una incógnita como parámetro y despejamos las otras dos en función de ella.

Tomamos $z = t$ como parámetro. De la primera ecuación: $y = 1 - t$. De la segunda: $x = -t$. La solución general es:

$$(x, y, z) = (-t, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para que $y = 0$: $1 - t = 0 \implies t = 1$. Entonces $x = -1, z = 1$.

Comprobación: $y + z = 0 + 1 = 1$ ✓; $(k - 1)x + y + z = 0(-1) + 0 + 1 = 1 = k$ ✓ (con $k = 1$);
 $x + (k - 1)y + z = -1 + 0 + 1 = 0$ ✓.

Sí existe una solución con $y = 0$: $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

BLOQUE D

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

a) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de $P(2, 2, 1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$

b) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de $Q(1, -1, -3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La recta r viene dada como intersección de dos planos, con normales $\vec{n}_1 = (1, -2, 1)$ y $\vec{n}_2 = (0, 1, -1)$. Un vector director de r es:

$$\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ((-2)(-1) - 1(1), -[1(-1) - 1(0)], 1(1) - (-2)(0)) = (1, 1, 1).$$

Buscamos un punto de r : tomando $y = 1$ (de la segunda ecuación, $z = y - 1 = 0$) y sustituyendo en la primera, $x - 2(1) + 0 = 2 \implies x = 4$. El punto es $R_0 = (4, 1, 0)$.

Idea clave

Para hallar el simétrico de P respecto a la recta r , primero calculamos el pie de la perpendicular H (la proyección ortogonal de P sobre r), imponiendo que el vector desde un punto genérico de r hasta P sea perpendicular a $\vec{d}_r$. Después, el punto simétrico es $P' = 2H - P$.

Un punto genérico de r es $R(t) = R_0 + t\vec{d}_r = (4 + t, 1 + t, t)$. Imponemos que $\overrightarrow{PR(t)}$ sea perpendicular a $\vec{d}_r$:

$$\overrightarrow{PR(t)} = (4 + t - 2, 1 + t - 2, t - 1) = (2 + t, t - 1, t - 1).$$

$$\overrightarrow{PR(t)} \cdot \vec{d}_r = (2 + t) + (t - 1) + (t - 1) = 3t = 0 \implies t = 0.$$

El pie de la perpendicular es $H = R(0) = (4, 1, 0)$.

Calculamos el punto simétrico:

$$P' = 2H - P = 2(4, 1, 0) - (2, 2, 1) = (8 - 2, 2 - 2, 0 - 1) = (6, 0, -1).$$

El punto simétrico de P respecto de r es $P' = (6, 0, -1)$.

Apartado b)

El plano π tiene normal $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Idea clave

Para el simétrico respecto a un plano, hallamos primero el pie H de la perpendicular trazada desde Q hasta π (recta con dirección $\vec{n}$ que pasa por Q), y después aplicamos $Q' = 2H - Q$, igual que con la recta.

La recta perpendicular a π por Q es $(x, y, z) = (1, -1, -3) + \lambda(1, -2, 1)$. Sustituimos en la ecuación de π :

$$(1 + \lambda) - 2(-1 - 2\lambda) + (-3 + \lambda) + 6 = 0 \implies 1 + \lambda + 2 + 4\lambda - 3 + \lambda + 6 = 0 \implies 6\lambda + 6 = 0 \implies \lambda = -1.$$

El pie de la perpendicular es:

$$H = (1 - 1, -1 + 2, -3 - 1) = (0, 1, -4).$$

Comprobación: H pertenece a π : $0 - 2(1) + (-4) + 6 = 0 - 2 - 4 + 6 = 0 \checkmark$.

Calculamos el punto simétrico:

$$Q' = 2H - Q = 2(0, 1, -4) - (1, -1, -3) = (0 - 1, 2 + 1, -8 + 3) = (-1, 3, -5).$$

El punto simétrico de Q respecto de π es $Q' = (-1, 3, -5)$.

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- a) [1 punto] Estudia la posición relativa de r y s .
- b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Un vector director de r (intersección de los planos $y = 0$ y $2x - z = 0$, de normales $(0, 1, 0)$ y $(2, 0, -1)$) es:

$$\vec{d}_r = (0, 1, 0) \times (2, 0, -1) = (1(-1) - 0(0), -[0(-1) - 0(2)], 0(0) - 1(2)) = (-1, 0, -2).$$

Un vector director de s (intersección de $x + y + 7 = 0$ y $z = 0$, de normales $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$) es:

$$\vec{d}_s = (1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1(1) - 0(0), -[1(1) - 0(0)], 1(0) - 1(0)) = (1, -1, 0).$$

Idea clave

Comprobamos primero el paralelismo comparando las direcciones; si no son proporcionales, comprobamos si las rectas se cortan planteando un sistema con parámetros distintos para cada recta.

Como $(-1, 0, -2)$ y $(1, -1, 0)$ no son proporcionales, **las rectas no son paralelas**.

Tomamos puntos: $R_0 = (0, 0, 0) \in r$ (con $y = 0$, $2x - z = 0 \Rightarrow x = z = 0$) y $S_0 = (0, -7, 0) \in s$ (con $z = 0$, $x + y + 7 = 0$, tomando $x = 0 \Rightarrow y = -7$).

Igualamos $R_0 + t\vec{d}_r = S_0 + u\vec{d}_s$:

$$\begin{cases} -t = u \\ 0 = -7 - u \\ -2t = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $t = 0$. De la primera, $u = 0$. Comprobamos la segunda: $0 = -7 - 0 = -7$, que es **falso**. El sistema es incompatible.

Al no ser paralelas ni cortarse, r y s son rectas que se cruzan.

Apartado b)

Idea clave

El plano pedido debe ser paralelo a ambas rectas, así que su vector normal es $\vec{d}_r \times \vec{d}_s$ (perpendicular a las dos direcciones a la vez). Como el plano es paralelo a ambas rectas, la distancia de cada recta al plano es constante a lo largo de toda la recta (no depende del punto elegido); por eso basta imponer que un punto cualquiera de r y un punto cualquiera de s estén a la misma distancia del plano. Esto es exactamente la misma idea que el plano mediador de dos puntos: el plano buscado pasa por el

punto medio de R_0 y S_0 .

Calculamos el vector normal:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0(0) - (-2)(-1), -[(-1)(0) - (-2)(1)], (-1)(-1) - 0(1)) = (-2, -2, 1).$$

Calculamos el punto medio de $R_0 = (0, 0, 0)$ y $S_0 = (0, -7, 0)$:

$$M = \frac{R_0 + S_0}{2} = \left(0, -\frac{7}{2}, 0\right).$$

La ecuación del plano, usando el punto M y el normal $\vec{n}$:

$$-2(x - 0) - 2\left(y + \frac{7}{2}\right) + 1(z - 0) = 0 \implies -2x - 2y - 7 + z = 0 \implies -2x - 2y + z - 7 = 0.$$

Comprobamos que las distancias de R_0 y S_0 al plano coinciden:

$$d(R_0, \pi) = \frac{|-2(0) - 2(0) + 0 - 7|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{7}{3}, \quad d(S_0, \pi) = \frac{|-2(0) - 2(-7) + 0 - 7|}{3} = \frac{|14 - 7|}{3} = \frac{7}{3}.$$

Como ambas distancias coinciden ($\frac{7}{3}$), y esta distancia es la misma en cualquier otro punto de cada recta (por ser el plano paralelo a ambas), el plano hallado es efectivamente equidistante.

El plano pedido es $-2x - 2y + z - 7 = 0$ (equivalentemente, $2x + 2y - z + 7 = 0$).