

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Ordinaria 2021

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las **ocho** que se proponen.

Tiempo y calificación: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

Idea clave

Mismo formato que los exámenes anteriores de esta serie: resolvemos las ocho preguntas (A.1–A.4 y B.1–B.4).

PREGUNTA A.1: Sistemas de ecuaciones: reparto de acciones (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A , B y C . Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C , que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

SOLUCIÓN

Llamamos A , B , C al número de acciones de cada tipo que recibe **cada hermano** (ya que el reparto es equitativo, los tres reciben lo mismo).

Idea clave

El valor de cada acción se deduce directamente del enunciado: si el valor de B es 1€, el de A es el triple (3€) y el de C es el doble del de A (6€). Con esos valores unitarios, las condiciones sobre acciones totales y valor total se convierten en ecuaciones.

Los valores unitarios son: $B = 1€$, $A = 3€$ (triple de B), $C = 6€$ (doble de A , ya que A es la mitad de C).

Total de acciones. Como hay tres hermanos y cada uno recibe $A + B + C$ acciones, y el total es 540:

$$3(A + B + C) = 540 \implies A + B + C = 180.$$

Valor total. Análogamente, el valor total repartido es 1560:

$$3(3A + B + 6C) = 1560 \implies 3A + B + 6C = 520.$$

Relación entre acciones de B y C. “El número de acciones de C es la mitad que el de B”:

$$C = \frac{B}{2} \implies B = 2C.$$

Sustituyendo $B = 2C$ en las otras dos ecuaciones:

$$A + 3C = 180, \quad 3A + 8C = 520.$$

De la primera: $A = 180 - 3C$. Sustituyendo en la segunda:

$$3(180 - 3C) + 8C = 520 \implies 540 - 9C + 8C = 520 \implies 540 - C = 520 \implies C = 20.$$

Con $C = 20$: $B = 2(20) = 40$; $A = 180 - 3(20) = 180 - 60 = 120$.

Comprobación: $120 + 40 + 20 = 180$ ✓; $3(120) + 40 + 6(20) = 360 + 40 + 120 = 520$ ✓.

A cada hermano le corresponden 120 acciones de A, 40 de B y 20 de C.

PREGUNTA A.2: Análisis: área entre dos parábolas (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x.$$

SOLUCIÓN

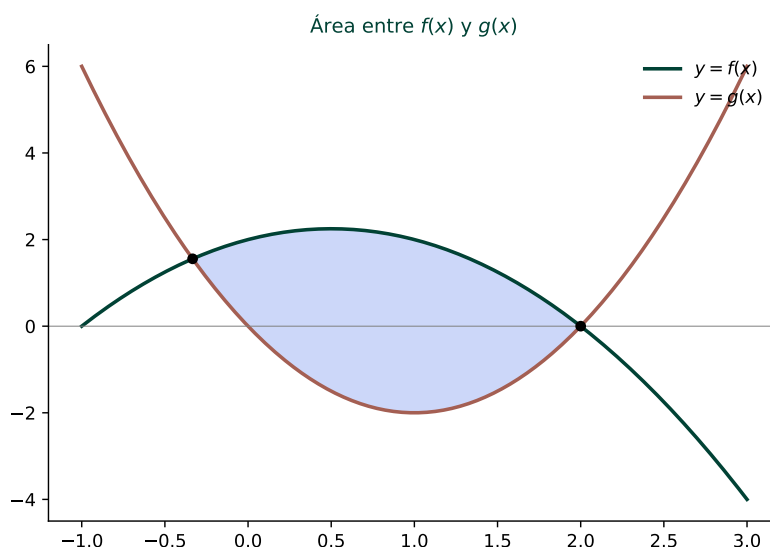


Figura 1: Región delimitada por $f(x)$ y $g(x)$.

Buscamos los puntos de corte, $f(x) = g(x)$, es decir, $g(x) - f(x) = 0$:

$$g(x) - f(x) = (2x^2 - 4x) - (2 + x - x^2) = 3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow x = 2 \text{ o } x = -\frac{1}{3}.$$

Idea clave

Para saber cuál gráfica queda por encima entre los puntos de corte, basta evaluar ambas en un punto intermedio sencillo, como $x = 0$.

En $x = 0$: $f(0) = 2$, $g(0) = 0$, así que $f(x) > g(x)$ en $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$. El área es

$$\text{Área} = \int_{-1/3}^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1/3}^2 (-3x^2 + 5x + 2) dx.$$

Calculamos la primitiva:

$$\int (-3x^2 + 5x + 2) dx = -x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x + C.$$

Aplicamos la regla de Barrow:

En $x = 2$: $-8 + 10 + 4 = 6$.

En $x = -\frac{1}{3}$: $-\left(-\frac{1}{27}\right) + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{9} + 2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{5}{18} - \frac{2}{3}$.

Con denominador común 54: $\frac{1}{27} = \frac{2}{54}$, $\frac{5}{18} = \frac{15}{54}$, $\frac{2}{3} = \frac{36}{54}$, suma = $\frac{2 + 15 - 36}{54} = -\frac{19}{54}$.

$$\text{Área} = 6 - \left(-\frac{19}{54}\right) = 6 + \frac{19}{54} = \frac{324 + 19}{54} = \frac{343}{54}.$$

El área de la región es $\frac{343}{54}$.

PREGUNTA A.3: Geometría del espacio (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π .

b (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

SOLUCIÓN

Parametrizamos r : de $-x - y + z = 0 \Rightarrow z = x + y$; sustituyendo en la segunda ecuación, $2x + 3y - (x + y) + 1 = 0 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 - 2y$. Tomando y como parámetro:

$$r \equiv (x, y, z) = (-1 - 2y, y, -1 - y), \quad \vec{d}_r = (-2, 1, -1).$$

El plano π tiene normal $\vec{n}_\pi = (2, 1, -1)$.

Apartado a)

Idea clave

El ángulo entre una recta y un plano se calcula a partir del seno (no del coseno), usando la dirección de la recta y la normal del plano.

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{d}_r\| \|\vec{n}_\pi\|} = \frac{|-4 + 1 + 1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

El ángulo es $\alpha = \arcsen\left(\frac{1}{3}\right) \approx 19.47^\circ$.

Apartado b)

Sustituimos la parametrización de r en π :

$$2(-1 - 2y) + y - (-1 - y) + 3 = 0 \implies -2 - 4y + y + 1 + y + 3 = 0 \implies 2 - 2y = 0 \implies y = 1.$$

El punto de intersección es $P = (-1 - 2, 1, -1 - 1) = (-3, 1, -2)$.

Idea clave

Para hallar el simétrico de P respecto al plano $z - y = 0$, trazamos la recta perpendicular a ese plano por P (dirección igual a su normal, $(0, -1, 1)$) y hallamos su punto de corte con el plano: ese es el punto medio entre P y su simétrico.

La recta perpendicular a $z - y = 0$ por P es $(x, y, z) = (-3, 1 - \lambda, -2 + \lambda)$. Sustituyendo en $z - y = 0$:

$$(-2 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \implies 2\lambda - 3 = 0 \implies \lambda = \frac{3}{2}.$$

El punto medio es $M = \left(-3, 1 - \frac{3}{2}, -2 + \frac{3}{2}\right) = \left(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

El simétrico es $P' = 2M - P = (-6, -1, -1) - (-3, 1, -2) = (-3, -2, 1)$.

El punto simétrico es $P'(-3, -2, 1)$.

Apartado c)

Idea clave

La proyección ortogonal de r sobre π es la intersección de π con el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π : la normal de π' se obtiene con el producto vectorial de $\vec{d}_r$ y $\vec{n}_\pi$.

$$\vec{n}_{\pi'} = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = (-2, 1, -1) \times (2, 1, -1) = (1(-1) - (-1)(1), (-1)(2) - (-2)(-1), (-2)(1) - 1(2)) = (0, -4, -4).$$

Simplificando (dividiendo por -4): $(0, 1, 1)$. El plano π' pasa por el punto de r , $(-1, 0, -1)$ (con $y = 0$):

$$0(x + 1) + 1(y - 0) + 1(z + 1) = 0 \implies y + z + 1 = 0.$$

La proyección ortogonal de r sobre π es la recta $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0. \end{cases}$

PREGUNTA A.4: Probabilidad: distribución normal (2.5 puntos)

ENUNCIADO

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

SOLUCIÓN

Sea T el tiempo de vida, $T \sim N(8.8, 3)$.

Apartado a)

$$Z_{10} = \frac{10 - 8.8}{3} \approx 0.40 \implies P(T > 10) = P(Z > 0.40) = 1 - 0.6554 = 0.3446.$$

$$Z_7 = \frac{7 - 8.8}{3} \approx -0.60.$$

$$P(7 < T < 10) = P(-0.60 < Z < 0.40) = P(Z < 0.40) - P(Z < -0.60) = 0.6554 - (1 - 0.7257) = 0.6554 - 0.2743 = 0.3811.$$

Un 34.46 % de los individuos supera los 10 meses, y un 38.11 % ha vivido entre 7 y 10 meses.

Apartado b)

Idea clave

“Al menos uno no supera los 10 meses” es el complementario de “los cuatro superan los 10 meses”.

Como $P(T > 10) = 0.3446$ (calculado en a), y los 4 especímenes son independientes:

$$P(\text{al menos uno no supera 10}) = 1 - P(\text{los 4 superan 10}) = 1 - (0.3446)^4 \approx 1 - 0.0141 = 0.9859.$$

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.9859.

Apartado c)

Por simetría de la normal respecto a la media, $P(8.8 - c < T < 8.8 + c) = 0.98$ equivale a

$$P\left(0 < Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{0.98}{2} = 0.49 \implies P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = 0.5 + 0.49 = 0.99.$$

Buscando en la tabla el valor de z tal que $P(Z < z) = 0.99$: $z \approx 2.33$.

$$\frac{c}{3} \approx 2.33 \implies c \approx 6.99.$$

El valor buscado es $c \approx 6.99$ meses.

PREGUNTA B.1: Sistemas de ecuaciones con parámetro (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :

$$\begin{cases} ax - 2y + (a - 1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6. \end{cases}$$

a (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a .

b (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a = 1$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix}$. Calculamos su determinante:

$$|A| = 3a^2 - 29a + 26 = (a - 1)(3a - 26).$$

Igualamos a cero: $a = 1$ o $a = \frac{26}{3}$.

Si $a \neq 1$ y $a \neq \frac{26}{3}$: $|A| \neq 0$, el sistema es **compatible determinado**.

Si $a = \frac{26}{3}$: puede comprobarse que $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|\vec{b}) = 3$: el sistema es **incompatible**.

Si $a = 1$: puede comprobarse que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b}) = 2 < 3$: el sistema es **compatible indeterminado**.

Apartado b)

Para $a = 1$, el sistema es

$$\begin{cases} x - 2y + 0z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -x + y - 6z = 6. \end{cases}$$

Idea clave

Como el sistema es compatible indeterminado, dos de las tres ecuaciones deben ser suficientes para describir toda la solución; conviene reducir primero un par de ecuaciones para quedarnos con dos independientes y un parámetro libre.

Sumando la 2.^a y la 3.^a ecuación: $-3x + 4y - 12z = 8$. Multiplicando la 1.^a por 3: $3x - 6y = 12$. Sumando estas dos: $-2y - 12z = 20 \Rightarrow -y - 6z = 10 \Rightarrow y = -10 - 6z$.

De la 1.^a ecuación: $x = 4 + 2y = 4 + 2(-10 - 6z) = 4 - 20 - 12z = -16 - 12z$.

Llamando $z = t$:

$$(x, y, z) = (-16 - 12t, -10 - 6t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comprobación: sustituyendo en la 1.^a ecuación original, $(-16 - 12t) - 2(-10 - 6t) = -16 - 12t + 20 + 12t = 4$ ✓.

La solución para $a = 1$ es $(x, y, z) = (-16 - 12t, -10 - 6t, t), t \in \mathbb{R}$.

PREGUNTA B.2: Análisis: continuidad, monotonía y Bolzano (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

a (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x = 0, \quad f(0) = 0.$$

f es continua en $x = 0$.

Para la derivabilidad, calculamos las derivadas laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

(límite notable, o aplicando L'Hôpital).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1.$$

Como ambas derivadas laterales coinciden ($= 1$): f es derivable en $x = 0$, con $f'(0) = 1$.

Apartado b)

Para $x \in (-\pi, 0)$: $f'(x) = \cos x$, que se anula en $x = -\frac{\pi}{2}$.

Idea clave

En $(-\pi, -\pi/2)$, $\cos x < 0$; en $(-\pi/2, 0)$, $\cos x > 0$: son los signos habituales del coseno en el segundo y primer cuadrante (con signo invertido en ángulo), respectivamente.

f es decreciente en $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ y creciente en $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Para $x > 0$: $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$, que es siempre positivo para $x > 0$ (ya que $e^x > 0$ y $x+1 > 1 > 0$).

f es creciente en $(0, 2)$.

Como f es continua en $x = 0$ y creciente tanto en $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ como en $(0, 2)$, f es creciente en todo $(-\frac{\pi}{2}, 2)$.

Idea clave

Para probar la existencia de x_0 con $f(x_0) = 2$, basta aplicar el teorema de Bolzano a $f(x) - 2$ en $[0, 1]$: si esta función cambia de signo en los extremos, tiene una raíz en el interior.

f es continua en $[0, 1]$ (por ser continua en todo $\mathbb{R}$, según el apartado a). Evaluamos:

$$f(0) = 0 < 2, \quad f(1) = 1 \cdot e^1 = e \approx 2.718 > 2.$$

Como $f(0) - 2 < 0$ y $f(1) - 2 > 0$, por el **teorema de Bolzano** existe $x_0 \in (0, 1) \subset [0, 1]$ tal que $f(x_0) = 2$.

Apartado c)

Separamos la integral según el cambio de definición en $x = 0$:

$$\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx = \int_{-\pi/2}^0 \sin x dx + \int_0^1 xe^x dx.$$

Primera parte:

$$\int_{-\pi/2}^0 \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi/2}^0 = (-\cos 0) - (-\cos(-\pi/2)) = -1 - 0 = -1.$$

Segunda parte. Integramos por partes con $u = x$, $dv = e^x dx$, de donde $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

$$\int_0^1 xe^x dx = [e^x(x-1)]_0^1 = e^0(1-1) - e^0(0-1) = 0 - (-1) = 1.$$

$$\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx = -1 + 1 = 0.$$

El valor de la integral es 0.

PREGUNTA B.3: Geometría del espacio: planos y distancias (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .

c (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y .

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Los planos paralelos a π_1 tienen la forma $x + y = D$, con normal $(1, 1, 0)$.

Idea clave

La distancia del origen a un plano $x + y = D$ (es decir, $x + y - D = 0$) se calcula con la fórmula habitual, sustituyendo el punto $(0, 0, 0)$.

$$d(O, \{x + y = D\}) = \frac{|0 + 0 - D|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \implies |D| = 2\sqrt{2} \implies D = \pm 2\sqrt{2}.$$

Los planos buscados son $x + y = 2\sqrt{2}$ y $x + y = -2\sqrt{2}$.

Apartado b)

Una recta perpendicular a π_2 tiene como dirección el vector normal de π_2 , $(1, 0, 1)$, y pasa por $(0, 2, 0)$:

La recta buscada es $(x, y, z) = (\lambda, 2, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Apartado c)

El plano $\pi_1 : x + y = 1$ corta al eje X (con $y = 0$) en $(1, 0, 0)$, y al eje Y (con $x = 0$) en $(0, 1, 0)$.

$$d((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

La distancia es $\sqrt{2}$.

PREGUNTA B.4: Probabilidad: calidad del aire (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2 , la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de NO_2 ” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?

d (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2 , sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

SOLUCIÓN

Denotamos N = “se supera el nivel de NO_2 ” y P = “se supera el nivel de partículas”, con

$$P(N) = 0.16, \quad P(P | N) = 0.33, \quad P(P | \bar{N}) = 0.08.$$

Apartado a)

$$P(N \cap P) = P(P | N) \cdot P(N) = 0.33(0.16) = 0.0528.$$

$$P(N \cap P) = 0.0528.$$

Apartado b)

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(P) = P(P | N)P(N) + P(P | \bar{N})P(\bar{N}) = 0.0528 + 0.08(0.84) = 0.0528 + 0.0672 = 0.12.$$

$$P(N \cup P) = P(N) + P(P) - P(N \cap P) = 0.16 + 0.12 - 0.0528 = 0.2272.$$

La probabilidad de superar al menos uno de los dos es 0.2272.

Apartado c)

Comparamos $P(N \cap P)$ con $P(N) \cdot P(P)$:

$$P(N) \cdot P(P) = 0.16(0.12) = 0.0192 \neq 0.0528 = P(N \cap P).$$

N y P no son independientes.

Apartado d)

Buscamos $P(N | \bar{P})$:

$$P(N | \bar{P}) = \frac{P(N \cap \bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{P(N) - P(N \cap P)}{1 - P(P)} = \frac{0.16 - 0.0528}{1 - 0.12} = \frac{0.1072}{0.88} \approx 0.1218.$$

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.1218.