

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Extraordinaria 2021

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Formato de este examen: elige 3 problemas de los 6 propuestos. Cada problema puntúa hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio es la suma de las calificaciones de los 3 problemas elegidos, dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Idea clave

Este examen (2021) usa el formato de 6 problemas, elige 3. Aquí resolvemos los 6, como recurso de repaso completo.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PROBLEMA 1: Sistema con parámetro lineal (10 puntos)**ENUNCIADO**

Se da el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$$
, donde m es un parámetro real. Se pide:

- La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m . (4 puntos)
- La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
- Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix}$. Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$|M| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & m \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & m \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & m \end{vmatrix} = m + 12, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & m \end{vmatrix} = m - 15, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9.$$

Sustituyendo:

$$|M| = 2(m + 12) + (m - 15) - 9 = 2m + 24 + m - 15 - 9 = 3m.$$

Idea clave

El determinante resulta ser simplemente $3m$: una expresión **lineal**, no cuadrática como en otros problemas con parámetro. Esto significa que solo hay **un** valor especial de m a discutir, no dos.

Si $m \neq 0$: $|M| \neq 0$, $rg(M) = rg(M') = 3 = n$. **SCD**: solución única.

Si $m = 0$: sustituyendo, se comprueba que $rg(M) = rg(M') = 2 < 3$. **SCI**: infinitas soluciones.

b) Para $m = 1$, el sistema es

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases}$$

Resolviendo (por ejemplo, sumando la primera y la segunda ecuación para eliminar y : $3x + 4z = 1$; y combinando la segunda con la tercera de forma análoga) se obtiene la solución única:

$$(x, y, z) = (3, 3, -2).$$

Idea clave

Comprobación con la primera ecuación: $2(3) - 3 + (-2) = 6 - 3 - 2 = 1 \checkmark$.

c) Para $m = 0$, el sistema es

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

(la tercera ecuación, $5x - 4y = 0$, resulta ser combinación de las otras dos). Sumando ambas ecuaciones: $3x + 4z = 0 \Rightarrow x = -\frac{4z}{3}$. Sustituyendo en la segunda: $-\frac{4z}{3} + y + 3z = 0 \Rightarrow y = \frac{4z}{3} - 3z = -\frac{5z}{3}$.

Tomando $z \in \mathbb{R}$ como parámetro libre:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{4z}{3}, -\frac{5z}{3}, z\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 2: Rectas, plano con parámetro y volumen de tetraedro (10 puntos)

ENUNCIADO

Se dan las rectas $r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi : x + my + z = 2$ que depende del parámetro real m . Obtener:

- La posición relativa de las rectas r y s . (4 puntos)
- El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π . (3 puntos)
- Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$. (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) Como r es la intersección de los planos $x + y - 1 = 0$ (normal $(1, 1, 0)$) y $2x - z - 1 = 0$ (normal $(2, 0, -1)$), su dirección es:

$$\vec{d}_r = (1, 1, 0) \times (2, 0, -1) = (-1, 1, -2).$$

El vector director de s es $\vec{d}_s = (1, -1, 2)$ (de la ecuación continua).

Idea clave

Observamos que $\vec{d}_r = -\vec{d}_s$: son proporcionales, así que **no son paralelas por casualidad**: son estrictamente paralelas (o coincidentes).

Para distinguir, tomamos un punto de cada recta: en r , con $y = 0$: $x = 1$, y de la segunda ecuación, $z = 2(1) - 1 = 1$, punto $(1, 0, 1)$. En s , con parámetro 0: punto $(1, 0, 0)$. La diferencia de estos puntos es $(0, 0, 1)$, que **no** es proporcional a $\vec{d}_r = (-1, 1, -2)$ (su producto vectorial no es nulo). Por tanto, las rectas son **paralelas y distintas** (no se cortan).

b) El normal de π es $\vec{n}_\pi = (1, m, 1)$. Para que $r \subset \pi$, necesitamos que $\vec{d}_r$ sea perpendicular a $\vec{n}_\pi$:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1)(1) + (1)(m) + (-2)(1) = -1 + m - 2 = m - 3.$$

Esto se anula en $m = 3$.

Idea clave

Comprobamos además que el punto de r , $(1, 0, 1)$, satisface π para **cualquier** m : $1 + m(0) + 1 = 2$ (el término con m se anula porque la coordenada y del punto es 0). Por tanto, la única condición que falta imponer es la de dirección, y basta $m = 3$.

El valor buscado es $m = 3$.

c) Para $m = 2$: $\pi : x + 2y + z = 2$. Los cortes con los ejes son:

$$A = (2, 0, 0) \text{ (eje } X), \quad B = (0, 1, 0) \text{ (eje } Y, \quad 2y = 2 \Rightarrow y = 1), \quad C = (0, 0, 2) \text{ (eje } Z).$$

El volumen del tetraedro de vértices A, B, C, P es $\frac{1}{6}$ del valor absoluto del producto mixto de tres de sus lados desde un mismo vértice:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AP})|.$$

Calculamos $\vec{AB} = (-2, 1, 0)$, $\vec{AC} = (-2, 0, 2)$, $\vec{AP} = (0, 2, 2)$ (con $P = (2, 2, 2)$).

$$\vec{AC} \times \vec{AP} = (-2, 0, 2) \times (0, 2, 2) = (0 \cdot 2 - 2 \cdot 2, -[(-2)(2) - 2 \cdot 0], (-2)(2) - 0 \cdot 0) = (-4, 4, -4).$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AP}) = (-2)(-4) + (1)(4) + (0)(-4) = 8 + 4 + 0 = 12.$$

$$V = \frac{|12|}{6} = 2.$$

PROBLEMA 3: Función con exponencial: extremos, asíntotas e integral (10 puntos)

ENUNCIADO

Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calcular:

- a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)
- b) Las asíntotas y la gráfica de f . (3 puntos)
- c) La integral $\int f(x) dx$. (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) La exponencial está definida para todo x , así que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Derivamos con la regla del producto, $u = x$ ($u' = 1$) y $v = e^{1-x^2}$ ($v' = -2x e^{1-x^2}$) por la regla de la cadena:

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x(-2x e^{1-x^2}) = e^{1-x^2}(1 - 2x^2).$$

Como $e^{1-x^2} > 0$ siempre, el signo de f' coincide con el signo de $1 - 2x^2$, que se anula en:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$: $1 - 2x^2 > 0$ ($f' > 0$, creciente). Para $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$: $1 - 2x^2 < 0$ ($f' < 0$, decreciente).

f es decreciente en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, creciente en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Por tanto:

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} : \text{mínimo relativo}, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} : \text{máximo relativo}.$$

Calculamos los valores:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{e} = \frac{\sqrt{2e}}{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2e}}{2}.$$

b) No hay asíntotas verticales (dominio $\mathbb{R}$). En el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{1-x^2} = 0,$$

ya que la exponencial decreciente domina sobre el crecimiento lineal de x . Asíntota horizontal $y = 0$ en ambas direcciones.

Idea clave

$f(-x) = -x e^{1-x^2} = -f(x)$: la función es **impar** (simétrica respecto al origen), lo que concuerda con que el mínimo y el máximo sean exactamente opuestos entre sí.

La gráfica parte de 0 (por la izquierda, viniendo de valores negativos), decrece hasta el mínimo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2}\right)$, crece pasando por el origen $(0, 0)$ hasta el máximo $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2}\right)$, y vuelve a decrecer hacia 0.

c) Para integrar, buscamos una función cuya derivada sea $f(x)$. Probamos con $g(x) = e^{1-x^2}$: $g'(x) = -2x e^{1-x^2} = -2f(x)$. Por tanto:

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + C.$$

PROBLEMA 4: Matriz con parámetro, matriz C y sistema con matriz de rango 1 (10 puntos)

ENUNCIADO

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Obtener:

- El rango de la matriz A según los valores del parámetro a . (3 puntos)
- Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$. (4 puntos)
- El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera columna:

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a - (a^2 - 2) = -a^2 + 3a + 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3(a^2 - 2) = 12 - 3a^2,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3a.$$

Sustituyendo:

$$|A| = (-a^2 + 3a + 2) + (12 - 3a^2) + (2 - 3a) = -4a^2 + 16.$$

Factorizamos: $|A| = -4(a^2 - 4) = -4(a - 2)(a + 2)$.

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$: $|A| \neq 0$, $rg(A) = 3$.

Si $a = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. La fila 3 es idéntica a la fila 1, así que $rg(A) \leq 2$; y el menor de filas 1,2 y

columnas 1,2, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, confirma $rg(A) = 2$.

Si $a = -2$: análogamente, $rg(A) = 2$.

b) Para $a = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, con $|A| = -4(0 - 4) = 16 \neq 0$.

Idea clave

De $AC = 16I$ obtenemos directamente $C = 16A^{-1}$ (multiplicando por A^{-1} a la izquierda). Como $|A| = 16$ ya coincide con el 16 del enunciado, el cálculo se simplifica: $C = 16A^{-1} = 16 \cdot \frac{1}{16} \text{adj}(A) = \text{adj}(A)$, ¡la matriz adjunta directamente, sin dividir!

Calculamos los 9 cofactores de A :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2, & C_{12} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4, & C_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2, \\ C_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -12, & C_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, & C_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, & C_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, & C_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

La matriz de cofactores es $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, y su traspuesta (que ya es directamente C , por la observación anterior):

$$C = \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) La matriz B es un producto de un vector columna por un vector fila: $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Idea clave

Todas las filas de B son múltiplos de $(1, 2, 3)$ (la fila 2 es -1 veces esa fila, y la fila 3 es 2 veces): esto es característico de una matriz construida como producto columna $\times$ fila, y siempre tiene **rango 1** (salvo que sea la matriz nula).

$\text{rg}(B) = 1$. Para el sistema $B\vec{x} = (1, -1, 2)^T$: observamos que el término independiente, $(1, -1, 2)$, sigue **exactamente el mismo patrón de escalado** que las filas de B (fila 2 = $-1 \times$ fila 1, fila 3 = $2 \times$ fila 1, y aquí también $-1 = -1 \times 1$ y $2 = 2 \times 1$). Por tanto, $\text{rg}(B') = \text{rg}(B) = 1$ también.

Como $\text{rg}(B) = \text{rg}(B') = 1 < 3$ (número de incógnitas), el sistema es **compatible indeterminado**: tiene infinitas soluciones. En la práctica, el sistema se reduce a una única ecuación, $x + 2y + 3z = 1$ (con dos parámetros libres).

PROBLEMA 5: Plano, recta paralela, distancia y alineación con parámetro (10 puntos)

ENUNCIADO

Dados los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide:

- La ecuación del plano que contiene a P , Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)
- La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q . Calcular la distancia entre las rectas r y s . (4 puntos)
- Los valores de α para los cuales P , Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

SOLUCIÓN

Calculamos $\vec{PQ} = Q - P = (1, -2, 1)$, que usaremos en varios apartados.

a) Para $\alpha = 1$: $R = (1, 3, -1)$, y $\vec{PR} = R - P = (0, 2, -1)$. El vector normal del plano es:

$$\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = (1, -2, 1) \times (0, 2, -1).$$

Calculamos cada componente:

$$\vec{i} : (-2)(-1) - (1)(2) = 0, \quad \vec{j} : -[(1)(-1) - (1)(0)] = 1, \quad \vec{k} : (1)(2) - (-2)(0) = 2.$$

$$\vec{n} = (0, 1, 2).$$

Imponiendo que pase por $P(1, 1, 0)$:

$$0(x - 1) + 1(y - 1) + 2(z - 0) = 0 \implies y + 2z - 1 = 0.$$

Idea clave

El plano no tiene término en x : es un plano paralelo al eje X (cualquier valor de x satisface la ecuación con los mismos y, z).

La distancia al origen es:

$$d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0.4472.$$

b) La recta r pasa por $R = (1, 3, -1)$ (con $\alpha = 1$) con la misma dirección que s (para ser paralela), $\vec{d}_s = \vec{PQ} = (1, -2, 1)$:

$$r : (x, y, z) = (1, 3, -1) + t(1, -2, 1).$$

Para la distancia entre las rectas paralelas r y s , usamos un punto de cada una (por ejemplo $P = (1, 1, 0) \in s$ y $R = (1, 3, -1) \in r$) y la fórmula del producto vectorial:

$$\vec{PR} = R - P = (0, 2, -1).$$

$$\vec{PR} \times \vec{d}_s = (0, 2, -1) \times (1, -2, 1).$$

Calculamos cada componente:

$$\vec{i} : (2)(1) - (-1)(-2) = 0, \quad \vec{j} : -[(0)(1) - (-1)(1)] = -1, \quad \vec{k} : (0)(-2) - (2)(1) = -2.$$

$$\vec{PR} \times \vec{d}_s = (0, -1, -2), \quad |\vec{PR} \times \vec{d}_s| = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}.$$

$$d(r, s) = \frac{|\vec{PR} \times \vec{d}_s|}{|\vec{d}_s|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0.9129.$$

c) P, Q, R están alineados cuando $\vec{PR}$ es proporcional a $\vec{PQ} = (1, -2, 1)$. Con R genérico, $\vec{PR} = (\alpha - 1, 2, -1)$.

Idea clave

Comparando las componentes y y z : $\frac{2}{-2} = -1$ y $\frac{-1}{1} = -1$: ya coinciden, **sin necesidad de conocer** α . Solo falta que la componente x mantenga la misma proporción.

$$\frac{\alpha - 1}{1} = -1 \implies \alpha - 1 = -1 \implies \alpha = 0.$$

El único valor es $\alpha = 0$. La recta que contiene a los tres puntos pasa por $P(1, 1, 0)$ con dirección $\vec{PQ} = (1, -2, 1)$:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

PROBLEMA 6: Campo de juego: rectángulo con extremos semicirculares (10 puntos)**ENUNCIADO**

Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura del enunciado. Se pide:

- Escribir la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)
- Calcular las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)

SOLUCIÓN

Llamamos x a la anchura del rectángulo central e y a su altura; cada semicírculo lateral tiene entonces radio $\frac{y}{2}$ (su diámetro coincide con el lado vertical del rectángulo).

Idea clave

A partir de la figura, las rayas pintadas son: el contorno completo del campo (los dos lados rectos, de longitud x cada uno, más los dos arcos semicirculares) y las dos líneas verticales que separan la zona rectangular de cada semicírculo (cada una de longitud y).

- a) El área total (rectángulo más los dos semicírculos, que juntos forman un círculo completo de radio $\frac{y}{2}$) es:

$$xy + \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 4 + \pi \implies xy + \frac{\pi y^2}{4} = 4 + \pi.$$

Despejamos x :

$$x = \frac{4 + \pi}{y} - \frac{\pi y}{4}.$$

La longitud total de las rayas es: dos lados rectos ($2x$), dos arcos semicirculares (que juntos forman una circunferencia completa de longitud $2\pi \cdot \frac{y}{2} = \pi y$), y las dos líneas verticales internas ($2y$):

$$L(y) = 2x + \pi y + 2y = 2x + (\pi + 2)y.$$

Sustituyendo x :

$$L(y) = 2 \left[\frac{4 + \pi}{y} - \frac{\pi y}{4} \right] + (\pi + 2)y = \frac{2(4 + \pi)}{y} - \frac{\pi y}{2} + (\pi + 2)y = \frac{2(4 + \pi)}{y} + y \left(2 + \frac{\pi}{2} \right).$$

b) Derivamos:

$$L'(y) = -\frac{2(4+\pi)}{y^2} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Igualamos a cero:

$$\frac{2(4+\pi)}{y^2} = 2 + \frac{\pi}{2} \implies y^2 = \frac{2(4+\pi)}{2 + \frac{\pi}{2}} = \frac{4(4+\pi)}{4+\pi} = 4 \implies y = 2$$

(descartamos $y = -2$ por no tener sentido físico).

Idea clave

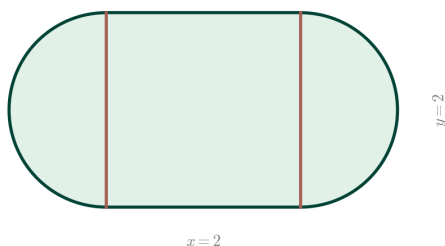
¡El factor $(4 + \pi)$ se cancela exactamente al simplificar! Esto explica por qué el área se había dado como $(4 + \pi)$ en vez de un número «suelto»: está construida a propósito para que $y = 2$ salga limpio.

Comprobamos que es un mínimo: $L''(y) = \frac{4(4+\pi)}{y^3} > 0$ para $y > 0$, así que se confirma un mínimo.

Sustituyendo $y = 2$ en la expresión de x :

$$x = \frac{4+\pi}{2} - \frac{2\pi}{4} = \frac{4+\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Campo óptimo ($x = y = 2$ m)



Las dimensiones óptimas son $x = 2$ m (anchura del rectángulo) e $y = 2$ m (altura del rectángulo, y diámetro de los semicírculos). La longitud mínima de pintura es $L(2) = 2\pi + 8 \approx 14.28$ m.