

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Ordinaria 2026

Matemáticas II

Serie 1

Baremo e instrucciones

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas e indíquela en la portada.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. La redacción de la respuesta debe realizarse de manera coherente, con corrección y claridad, empleando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Idea clave

Este examen (Catalunya, 2026, Serie 1) exige elegir una única opción en el ejercicio 4. Aquí resolvemos también las dos opciones (A y B), como recurso de repaso completo.

EJERCICIO 1: Función definida a trozos: continuidad, área y recta tangente (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considere la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{2x} & x \leq 0 \\ (x+m)^2 + 1 & 0 < x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

donde m es un parámetro real.

1.1 (1 punto) Determine los valores de m que hacen que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. Justifique la respuesta.

1.2 (1 punto) Haga un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ para el caso $m = -2$, y calcule el área delimitada por esta gráfica, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

1.3 (0,5 puntos) Para $m = -2$, encuentre un punto donde la recta tangente a $y = f(x)$ sea paralela a $y = -2x$. Calcule la ecuación de esta recta tangente.

SOLUCIÓN

Los tres trozos de f son funciones elementales (exponencial, polinómica y constante), continuas cada una en su propio intervalo. El único riesgo de discontinuidad está en los puntos donde cambia la definición, $x = 0$ y $x = 2$: ahí es donde hay que igualar límites laterales.

Apartado 1.1)

Idea clave

Para que una función a trozos sea continua en un punto de cambio de definición, el límite lateral de cada trozo debe coincidir con el valor de la función en ese punto (que viene dado por el trozo que sí incluye la igualdad).

En $x = 0$ (incluido en el primer trozo, $f(0) = 5e^0 = 5$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x + m)^2 + 1] = m^2 + 1.$$

Iguando: $m^2 + 1 = 5 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = 2$ o $m = -2$.

En $x = 2$ (incluido en el tercer trozo, $f(2) = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [(x + m)^2 + 1] = (2 + m)^2 + 1.$$

Iguando: $(2 + m)^2 + 1 = 1 \Rightarrow (2 + m)^2 = 0 \Rightarrow m = -2$.

Idea clave

La función solo es continua en *todo* su dominio si se cumplen *a la vez* las dos condiciones (en $x = 0$ y en $x = 2$), no basta con satisfacer una de ellas.

La condición en $x = 0$ admite $m = 2$ o $m = -2$, pero la condición en $x = 2$ exige $m = -2$. El único valor común a ambas es $m = -2$.

$$f \text{ es continua en todo } \mathbb{R} \iff m = -2.$$

Apartado 1.2)

Para $m = -2$, la función queda:

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{2x} & x \leq 0 \\ (x - 2)^2 + 1 & 0 < x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

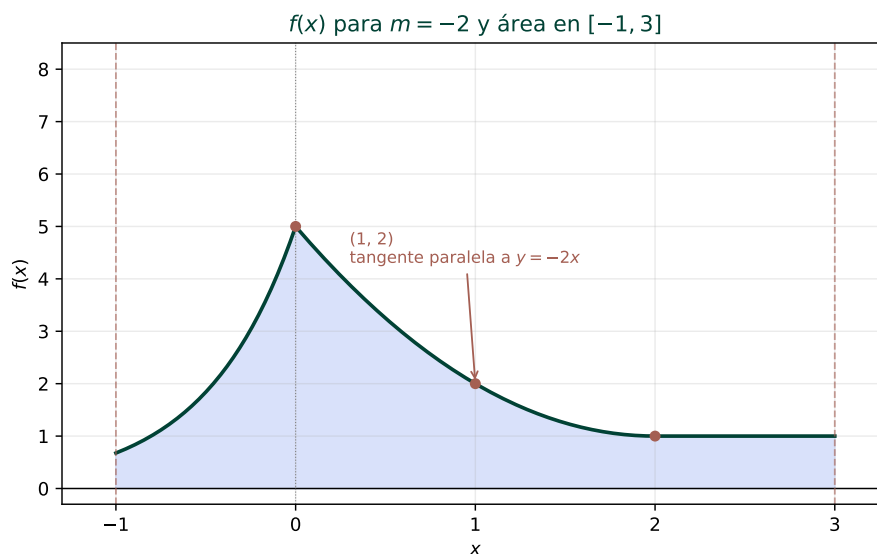


Figura 1: Gráfica de $f(x)$ para $m = -2$ y área sombreada en $[-1, 3]$.

Idea clave

Antes de integrar directamente, conviene comprobar el signo de f en $[-1, 3]$: si $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo, el área pedida es simplemente $\int f(x) dx$, sin necesidad de valores absolutos.

En $[-1, 0]$: $5e^{2x} > 0$ siempre. En $(0, 2)$: $(x-2)^2 + 1 \geq 1 > 0$. En $[2, 3]$: $f(x) = 1 > 0$. Por tanto $f(x) > 0$ en todo $[-1, 3]$ y el área es directamente la integral:

$$\text{Área} = \int_{-1}^0 5e^{2x} dx + \int_0^2 [(x-2)^2 + 1] dx + \int_2^3 1 dx.$$

Primera integral:

$$\int_{-1}^0 5e^{2x} dx = \left[\frac{5}{2} e^{2x} \right]_{-1}^0 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} e^{-2}.$$

Segunda integral (con el cambio $u = x - 2$, $du = dx$, límites $u = -2$ a $u = 0$):

$$\int_0^2 [(x-2)^2 + 1] dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3} + x \right]_0^2 = (0 + 2) - \left(-\frac{8}{3} + 0 \right) = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Tercera integral:

$$\int_2^3 1 dx = 1.$$

Sumando (denominador común 6):

$$\text{Área} = \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2} e^{-2} \right) + \frac{14}{3} + 1 = \frac{15}{6} + \frac{28}{6} + \frac{6}{6} - \frac{5}{2} e^{-2} = \frac{49}{6} - \frac{5}{2} e^{-2}.$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{49}{6} - \frac{5}{2e^2} \approx 7,828 \text{ u}^2.}$$

Apartado 1.3)

Idea clave

Una recta tangente es paralela a $y = -2x$ cuando tiene la misma pendiente, -2 . Basta buscar en qué punto $f'(x) = -2$, revisando cada trozo por separado.

En $x < 0$: $f'(x) = 10e^{2x}$, que es siempre estrictamente positivo (nunca puede valer -2).

En $0 < x < 2$: $f(x) = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2(x-2)$. Igualando a -2 :

$$2(x-2) = -2 \Rightarrow x-2 = -1 \Rightarrow x = 1,$$

que sí pertenece a $(0, 2)$.

En $x > 2$: $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$, que nunca vale -2 .

Por tanto el único punto es $x = 1$, con $f(1) = (1-2)^2 + 1 = 2$: el punto es $(1, 2)$.

La recta tangente en ese punto, con pendiente -2 , es:

$$y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -2x + 4.}$$

EJERCICIO 2: Sistema de tres planos con parámetro (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, el cual está formado por tres planos en el espacio y depende del parámetro real m :

$$\left. \begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array} \right\}.$$

2.1 (1 punto) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m .

2.2 (1 punto) Interprete geométricamente este sistema para todos los valores del parámetro m y resuélvalo, si es posible, para el caso $m = 1$.

2.3 (0,5 puntos) Para $m = 1$, ¿es posible añadir una cuarta ecuación de manera que el sistema resultante sea compatible determinado y tenga como solución $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$? Razone la respuesta.

SOLUCIÓN

La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apartado 2.1)

Desarrollamos el determinante por la primera columna:

$$|M| = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2, \quad \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 1, \quad \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = m - 3.$$

Sustituyendo:

$$|M| = 2 - (m - 1) + m(m - 3) = 2 - m + 1 + m^2 - 3m = m^2 - 4m + 3.$$

Factorizando: $|M| = (m - 1)(m - 3)$, que se anula en $m = 1$ y $m = 3$.

Idea clave

Como se trata de un sistema cuadrado (3 ecuaciones, 3 incógnitas), basta con estudiar el determinante: fuera de sus raíces el sistema es compatible determinado, y solo en $m = 1$ y $m = 3$ es necesario un análisis de rangos aparte.

Caso $m \neq 1$ y $m \neq 3$: $|M| \neq 0$, luego $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 3 = n$. **Sistema compatible determinado (SCD).**

Caso $m = 1$: la matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con las filas 1 y 3 idénticas, así que $\text{rg}(M) = 2$ (el menor formado por filas 1,2 y columnas 1,2 es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$). La matriz ampliada también tiene sus filas 1 y 3 idénticas ($(1, 1, 1 \mid 4)$ en ambas), por lo que $\text{rg}(M') = 2$ también. Como $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 2 < 3 = n$: **sistema compatible indeterminado (SCI).**

Caso $m = 3$: la matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con las filas 1 y 2 idénticas, así que $\text{rg}(M) = 2$. Sin embargo, en la matriz ampliada las filas correspondientes son $(1, 3, 1 \mid 4)$ y $(1, 3, 1 \mid 5)$: mismo primer miembro, distinto término independiente, lo que añade una fila del tipo $(0 \ 0 \ 0 \mid k)$ con $k \neq 0$ al escalonar. Por tanto $\text{rg}(M') = 3 \neq \text{rg}(M) = 2$: **sistema incompatible (SI).**

Resumen:

m	Tipo de sistema
$m \neq 1, 3$	SCD
$m = 1$	SCI
$m = 3$	SI

Apartado 2.2)

Idea clave

Cada ecuación del sistema es un plano. El tipo de solución (SCD/SCI/SI) se traduce directamente en cómo se cortan esos tres planos en el espacio.

Para $m \neq 1, 3$ (SCD): los tres planos se cortan en un único punto del espacio.

Para $m = 3$ (SI): los planos $\pi_1 : x + 3y + z = 4$ y $\pi_2 : x + 3y + z = 5$ tienen el mismo vector normal $(1, 3, 1)$ pero distinto término independiente, así que son **planos paralelos y distintos**. El tercer plano, $\pi_3 : 3x + y + z = 4$, tiene un vector normal $(3, 1, 1)$ no proporcional a $(1, 3, 1)$, por lo que corta a ambos. Los tres planos forman un **prisma triangular**: se cortan dos a dos en tres rectas paralelas, sin ningún punto común a los tres.

Para $m = 1$ (SCI): los planos $\pi_1 : x + y + z = 4$ y $\pi_3 : x + y + z = 4$ son el mismo plano (coinciden exactamente). El plano $\pi_2 : x + 3y + z = 5$ tiene un vector normal $(1, 3, 1)$ no proporcional a $(1, 1, 1)$, así que corta a π_1 (y por tanto a π_3 , que es el mismo plano) en una **recta**: los tres planos comparten esa recta común, y ahí está la infinidad de soluciones.

Resolvemos el caso $m = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Idea clave

La primera y la tercera ecuación son idénticas (ya lo hemos visto al estudiar los rangos), así que el sistema equivale, en realidad, a solo dos ecuaciones independientes.

Restando la primera ecuación de la segunda: $2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo en la primera: $x + \frac{1}{2} + z = 4 \Rightarrow x + z = \frac{7}{2}$.

Tomando $z = \lambda$ como parámetro libre:

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{2} - \lambda, \frac{1}{2}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Apartado 2.3)**Idea clave**

El punto propuesto debe, antes que nada, pertenecer ya a la recta de soluciones del apartado anterior: si no la cumple, ninguna cuarta ecuación compatible con el sistema puede tenerlo como solución.

Comprobamos que $\left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ verifica el sistema con $m = 1$: tomando $\lambda = \frac{1}{2}$ en la solución paramétrica, $x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$. Coincide exactamente. El punto sí pertenece a la recta de soluciones.

Idea clave

La recta de soluciones tiene dirección $\vec{d} = (-1, 0, 1)$ (el vector que multiplica a λ). Una cuarta ecuación $ax + by + cz = d$ reducirá las infinitas soluciones a una única si el punto la satisface y, además, su vector de coeficientes (a, b, c) no es perpendicular a $\vec{d}$ (si lo fuera, toda la recta la verificaría y no se ganaría información nueva).

Sí es posible. Por ejemplo, la ecuación $2x - 2z = 5$ cumple $2(3) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - 1 = 5$, y su vector de coeficientes $(2, 0, -2)$ no es perpendicular a $\vec{d} = (-1, 0, 1)$ (su producto escalar es $-2 - 2 = -4 \neq 0$), así que no es paralela a la recta y la corta en un único punto.

Añadiendo esta ecuación al sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x - 2z = 5 \end{cases}$$

se obtiene el sistema compatible determinado con solución única $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

EJERCICIO 3: Probabilidad: sorteo de entradas y aplicación de derivadas (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

El Ayuntamiento de Canet de Mar ha conseguido 24 entradas gratuitas para un concierto de un grupo de rock catalán, y ha decidido sortearlas entre los vecinos interesados en asistir. Todos los vecinos del pueblo seguidores de este grupo se apuntan al sorteo, y solo al 16 % de ellos les toca una entrada. Del resto de seguidores del grupo, seis séptimas partes intentan comprar una entrada a través de la web, donde la probabilidad de conseguirla es del 25 %.

3.1 (0,75 puntos) ¿Cuántas personas de este municipio tienen entrada para el concierto?

3.2 (0,75 puntos) Si se escoge al azar un vecino de Canet seguidor de este grupo de rock y no tiene entrada para el concierto, ¿cuál es la probabilidad de que haya intentado conseguirla vía web?

3.3 (1 punto) El día del concierto, el equipo de sonido mide el nivel de decibelios generado por los gritos entusiastas del público a lo largo de los 5 minutos de duración de la canción más famosa del grupo; se puede aproximar por la siguiente función:

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90, \quad t \in [0, 5],$$

donde t es el tiempo en minutos y $S(t)$ los decibelios. Cuando se superan los 100 decibelios se considera que el público está muy entregado y se activan automáticamente unos efectos lumínicos especiales. ¿Se activarán en algún momento durante estos cinco minutos? Si la respuesta es afirmativa, calcule en qué minuto se activan, aproximado a las décimas.

SOLUCIÓN

Apartados 3.1 y 3.2)

Idea clave

El enunciado no da directamente el número total de seguidores, pero lo podemos deducir: el 16 % de los seguidores son justamente las 24 personas que ganan el sorteo.

Sea N el número total de seguidores del grupo que se apuntan al sorteo. Como el 16 % de ellos gana una de las 24 entradas:

$$0,16 \cdot N = 24 \implies N = \frac{24}{0,16} = 150.$$

El resto de seguidores, los que no ganan el sorteo, son $150 - 24 = 126$.

De estos 126, seis séptimas partes intentan comprar por la web:

$$126 \cdot \frac{6}{7} = 108 \text{ personas intentan comprar por la web,}$$

y las $126 - 108 = 18$ restantes no lo intentan (y por tanto se quedan sin entrada).

De las 108 que lo intentan, consiguen entrada el 25 %:

$$108 \cdot 0,25 = 27 \text{ personas consiguen entrada por la web,}$$

y las $108 - 27 = 81$ restantes lo intentan pero no lo consiguen.

Apartado 3.1) El total de personas con entrada es la suma de las que ganan el sorteo y las que la consiguen por la web:

$$24 + 27 = 51 \text{ personas tienen entrada.}$$

Apartado 3.2) Las personas *sin* entrada son las que no ganaron el sorteo y, además, o bien no lo intentaron por la web, o bien lo intentaron sin éxito:

$$\text{Sin entrada} = 18 \text{ (no lo intentaron)} + 81 \text{ (lo intentaron, sin éxito)} = 99.$$

De estas 99 personas sin entrada, las que sí intentaron la web son las 81 que lo intentaron y no lo consiguieron. Por tanto:

$$P(\text{intentó web} \mid \text{sin entrada}) = \frac{81}{99} = \frac{9}{11} \approx 0,818.$$

$$P(\text{intentó web} \mid \text{sin entrada}) = \frac{9}{11} \approx 0,818.$$

Apartado 3.3)**Idea clave**

Antes de resolver $S(t) = 100$ directamente, conviene estudiar la monotonía de S en $[0, 5]$: así sabemos si hay uno o varios instantes en que se supera el umbral, y en qué tramo buscar la solución.

Derivamos: $S'(t) = -3t^2 + 24t - 30 = -3(t^2 - 8t + 10)$.

Igualando a cero: $t^2 - 8t + 10 = 0 \implies t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 40}}{2} = 4 \pm \sqrt{6}$.

De las dos soluciones, $4 - \sqrt{6} \approx 1,551$ pertenece a $[0, 5]$; la otra, $4 + \sqrt{6} \approx 6,449$, queda fuera del intervalo y no se considera.

Estudiamos el signo de S' (parábola $-3(t^2 - 8t + 10)$, negativa fuera de sus raíces y positiva entre ellas):

para $t \in [0, 4 - \sqrt{6})$, $S'(t) < 0$ (S decrece); para $t \in (4 - \sqrt{6}, 5]$, $S'(t) > 0$ (S crece).

Idea clave

Con un único punto crítico dentro de $[0, 5]$ y ese cambio de signo, S decrece primero y luego crece: el máximo en el intervalo cerrado solo puede estar en uno de los extremos, $t = 0$ o $t = 5$.

Evaluamos en los extremos:

$$S(0) = 90, \quad S(5) = -125 + 300 - 150 + 90 = 115.$$

Como $S(5) = 115 > 100$ y $S(0) = 90 < 100$, y S es creciente en todo el tramo final $(4 - \sqrt{6}, 5]$ (que va desde un valor por debajo de 90 hasta 115), sí se supera el umbral de 100 decibelios en algún instante de ese tramo creciente.

Sí, se activan los efectos lumínicos en algún momento de los 5 minutos.

Para hallar el instante exacto, resolvemos $S(t) = 100$ en el tramo creciente, es decir $t^3 - 12t^2 + 30t + 10 = 0$ con $t \in (4 - \sqrt{6}, 5)$. Esta ecuación cúbica no tiene una solución racional sencilla; resolviendo numéricamente se obtiene:

$$t \approx 4,111.$$

Los efectos se activan en el minuto $t \approx 4,1$.

EJERCICIO 4: Escoja UNA de las dos opciones (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean. Indique en la portada del examen la opción elegida.

Opción A

El alcalde de un pueblo de Catalunya encarga al arquitecto municipal el diseño de un parque infantil que se construirá en un terreno público. Para cumplir con la normativa vigente, en el parque tiene que haber dos espacios bien delimitados: uno para una boca de riego —el cual, según el arquitecto, debe tener forma circular—, y otro para una caseta donde guardar las herramientas de mantenimiento —el cual debe tener forma cuadrada—. Por motivos estéticos, el arquitecto quiere delimitar cada uno de estos dos espacios con una barandilla de forja. Sabiendo que las dos barandillas miden exactamente 10 m de longitud en total, ¿qué medida debe tener la barandilla de cada espacio para que la suma de las superficies de los dos espacios sea lo más pequeña posible? ¿Cuál es esta superficie mínima?

Opción B

Considere los puntos del espacio $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ y $R = (1, 1, 1)$.

4.1 (0,75 puntos) Calcule la ecuación del plano que contiene los puntos P , Q y R .

4.2 (0,75 puntos) Compruebe que el área del triángulo ΔPQR es $\frac{3\sqrt{5}}{2} u^2$.

4.3 (1 punto) Determine las condiciones que deben cumplir las coordenadas de un cuarto punto $S = (x, y, z)$ para que P , Q , R y S formen un tetraedro de volumen 1. (El volumen del tetraedro formado por los puntos P , Q , R y S es: $\text{volumen}(PQRS) = \frac{\text{área}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3}$).

SOLUCIÓN

Resolvemos primero la Opción A.

Idea clave

Con una longitud total fija (10 m) repartida entre dos figuras, conviene expresar el área de *cada* figura en función de *una sola* variable —aquí, la longitud x dedicada a la barandilla circular— y así reducir el problema a optimizar una única función de una variable.

Llamamos x a la longitud de la barandilla circular (el perímetro de la circunferencia) y $10 - x$ a la de la barandilla cuadrada (el perímetro del cuadrado), con $0 < x < 10$.

Si $x = 2\pi r$, el radio es $r = \frac{x}{2\pi}$, y el área del círculo es:

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{x}{2\pi} \right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}.$$

Si $10 - x = 4s$, el lado del cuadrado es $s = \frac{10 - x}{4}$, y su área es:

$$A_{\text{cuadrado}} = s^2 = \left(\frac{10 - x}{4} \right)^2.$$

El área total a minimizar es:

$$A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(10 - x)^2}{16}, \quad 0 < x < 10.$$

Derivamos:

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{10 - x}{8}.$$

Igualando a cero:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{10 - x}{8} \implies 8x = 2\pi(10 - x) \implies 8x + 2\pi x = 20\pi \implies x(8 + 2\pi) = 20\pi,$$

$$x = \frac{20\pi}{8 + 2\pi} = \frac{10\pi}{4 + \pi} \approx 4,399 \text{ m.}$$

Idea clave

Al ser $A(x)$ suma de dos parábolas con coeficiente cuadrático positivo ($\frac{1}{4\pi} > 0$ y $\frac{1}{16} > 0$), $A''(x)$ es una constante positiva: cualquier punto crítico es automáticamente un mínimo global, sin necesidad de más comprobación.

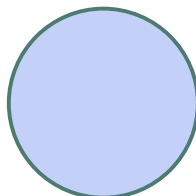
En efecto, $A''(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8} > 0$ (constante), luego $x = \frac{10\pi}{4 + \pi}$ es un mínimo.

La barandilla del cuadrado mide:

$$10 - x = 10 - \frac{10\pi}{4 + \pi} = \frac{10(4 + \pi) - 10\pi}{4 + \pi} = \frac{40}{4 + \pi} \approx 5,601 \text{ m.}$$

Reparto óptimo de los 10 m de barandilla

Boca de riego
radio $\approx 0,700$ m
barandilla = $x \approx 4,399$ m



Caseta
lado $\approx 1,400$ m
barandilla = $10 - x \approx 5,601$ m



Figura 2: Reparto óptimo de los 10 m de barandilla entre la boca de riego circular y la caseta cuadrada.

Barandilla circular $\approx 4,399$ m, barandilla cuadrada $\approx 5,601$ m.

Calculamos el área mínima sustituyendo $x = \frac{10\pi}{4 + \pi}$ en $A(x)$ (o, de forma equivalente, $r = \frac{x}{2\pi} = \frac{5}{4 + \pi}$ y $s = \frac{10 - x}{4} = \frac{10}{4 + \pi}$):

$$A_{\min} = \pi r^2 + s^2 = \pi \left(\frac{5}{4 + \pi} \right)^2 + \left(\frac{10}{4 + \pi} \right)^2 = \frac{25\pi + 100}{(4 + \pi)^2} = \frac{25(\pi + 4)}{(4 + \pi)^2} = \frac{25}{4 + \pi}.$$

$$A_{\min} = \frac{25}{4 + \pi} \approx 3,501 \text{ m}^2.$$

Resolvemos ahora la Opción B.

Con $P = (1, 0, -1)$, $Q = (3, -2, 0)$ y $R = (1, 1, 1)$, formamos dos vectores directores del plano:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, -2, 1), \quad \overrightarrow{PR} = R - P = (0, 1, 2).$$

Apartado 4.1)

Idea clave

El producto vectorial de dos vectores directores del plano da un vector normal a dicho plano; con ese normal y un punto conocido, la ecuación del plano es inmediata.

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ((-2)(2) - 1(1), 1(0) - 2(2), 2(1) - (-2)(0)) = (-5, -4, 2).$$

El plano que pasa por $P(1, 0, -1)$ con normal $\vec{n} = (-5, -4, 2)$ es:

$$-5(x - 1) - 4(y - 0) + 2(z + 1) = 0 \implies -5x - 4y + 2z + 7 = 0,$$

que, multiplicando por -1 para dejar el primer coeficiente positivo, queda:

$$\boxed{5x + 4y - 2z - 7 = 0.}$$

Comprobamos con $Q(3, -2, 0)$: $5(3) + 4(-2) - 2(0) - 7 = 15 - 8 - 7 = 0$ ✓. Con $R(1, 1, 1)$: $5 + 4 - 2 - 7 = 0$ ✓.

Apartado 4.2)

Idea clave

El área de un triángulo formado por dos vectores es la mitad del módulo de su producto vectorial: geoméricamente, $|\vec{u} \times \vec{v}|$ es el área del paralelogramo que generan.

$$\text{área}(\Delta PQR) = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 16 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{45}.$$

Como $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$:

$$\text{área}(\Delta PQR) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2} u^2,$$

que es precisamente el valor que había que comprobar.

Apartado 4.3)

Idea clave

La fórmula del volumen dada relaciona el volumen con el área de la base (ya conocida) y la altura desde S hasta el plano PQR . Basta despejar la altura necesaria para que el volumen valga 1, y traducir esa altura en una condición sobre las coordenadas de S usando la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\text{De volumen}(PQRS) = \frac{\text{área}(\Delta PQR) \cdot \text{altura}}{3} = 1, \text{ con } \text{área} = \frac{3\sqrt{5}}{2}:$$

$$\text{altura} = \frac{3}{\text{área}(\Delta PQR)} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{3 \cdot 2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

La altura buscada es, precisamente, la distancia de $S = (x, y, z)$ al plano PQR : $5x + 4y - 2z - 7 = 0$, cuyo vector normal $(5, 4, -2)$ tiene módulo $\sqrt{25 + 16 + 4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Así:

$$d(S, \pi_{PQR}) = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Despejando:

$$|5x + 4y - 2z - 7| = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 3\sqrt{5} = 6.$$

Idea clave

El valor absoluto se debe a que S puede quedar a un lado o al otro del plano PQR : ambas posiciones dan un tetraedro de la misma altura (y por tanto el mismo volumen).

$$5x + 4y - 2z - 7 = 6 \quad \text{o bien} \quad 5x + 4y - 2z - 7 = -6,$$

es decir, $S = (x, y, z)$ debe cumplir $5x + 4y - 2z = 13$ o $5x + 4y - 2z = 1$: dos planos paralelos al plano PQR , situados simétricamente a la distancia adecuada a cada lado.