

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Extraordinaria 2025

Matemáticas II

Serie 3

Baremo e instrucciones

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Cada ejercicio vale 2,5 puntos. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que se planteen. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.

En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. La redacción de la respuesta debe hacerse de manera coherente, con corrección y claridad, empleando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de manera clara.

Puede utilizar las páginas en blanco del final del cuaderno para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder algún ejercicio si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página del ejercicio correspondiente.

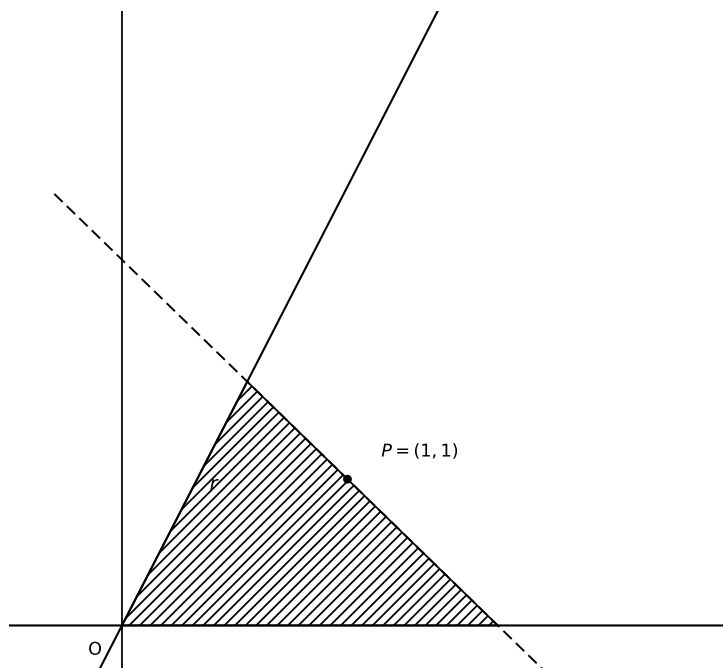
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

Idea clave

Este examen (Catalunya, 2025, Serie 3) exige elegir una única opción en el ejercicio 4. Aquí resolvemos también las dos opciones (A y B), como recurso de repaso completo.

EJERCICIO 1: Optimización geométrica: terreno triangular entre dos acantilados (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Una familia quiere comprar un terreno para construirse una casa rodeada de acantilados con vistas al mar. En esa zona de la costa, los acantilados siguen las rectas $y = 0$ e $y = 3x$. Además, la familia quiere que el terreno sea triangular y que el tercer lado del triángulo pase por el punto $P = (1, 1)$, tal como se puede ver en la figura.



a (1 punto) Plantee la ecuación de la recta r que define el tercer lado del triángulo en función de su pendiente m , y compruebe que el área del terreno viene dada por

$$A(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 3m}.$$

b (1,5 puntos) Calcule el valor de m que hace que el área de este terreno (y, por tanto, su precio) sea mínima. ¿Cuál es el valor de esta área?

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

La recta r tiene pendiente m y pasa por $P(1, 1)$: su ecuación punto-pendiente da directamente los otros dos vértices del triángulo, cortando r con cada uno de los dos “acantilados” ($y = 0$ y $y = 3x$). El tercer vértice es el origen, donde se cortan los dos acantilados entre sí.

La recta r , con pendiente m y que pasa por $P(1, 1)$, es:

$$y - 1 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx - m + 1.$$

Los tres vértices del triángulo son: el origen $O = (0, 0)$ (donde se cortan $y = 0$ y $y = 3x$), el punto donde r corta a $y = 0$, y el punto donde r corta a $y = 3x$.

Corte de r con $y = 0$: $0 = mx - m + 1 \Rightarrow x = \frac{m-1}{m}$. Punto $V_1 = \left(\frac{m-1}{m}, 0\right)$.

Corte de r con $y = 3x$: $3x = mx - m + 1 \Rightarrow x(3 - m) = 1 - m \Rightarrow x = \frac{1-m}{3-m} = \frac{m-1}{m-3}$. La ordenada es $y = 3x = \frac{3(m-1)}{m-3}$. Punto $V_2 = \left(\frac{m-1}{m-3}, \frac{3(m-1)}{m-3}\right)$.

Idea clave

Con un vértice en el origen, el área del triángulo se calcula de forma muy directa: es la mitad del valor absoluto del determinante formado por los otros dos vértices (fórmula del área con el origen como vértice).

Como $O = (0, 0)$ es un vértice, el área es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |x_{V_1} \cdot y_{V_2} - x_{V_2} \cdot y_{V_1}| = \frac{1}{2} |x_{V_1} \cdot y_{V_2}|$$

(ya que $y_{V_1} = 0$). Sustituyendo:

$$x_{V_1} \cdot y_{V_2} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{3(m-1)}{m-3} = \frac{3(m-1)^2}{m(m-3)}.$$

Para los valores de m que dan lugar al triángulo de la figura (con $m < 0$, como se verá en el apartado b), la cantidad $m(m-3)$ es positiva (producto de dos negativos... en realidad $m < 0$ y $m-3 < 0$, luego $m(m-3) > 0$), así que la expresión ya es positiva y no hace falta el valor absoluto:

$$\text{Área} = A(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3(m-1)^2}{m(m-3)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)^2}{m^2-3m} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-2m+1}{m^2-3m},$$

que es precisamente la expresión que había que comprobar.

Apartado b)**Idea clave**

Antes de derivar, conviene fijar el dominio real de m : como el triángulo de la figura tiene un vértice en la parte positiva del eje Y (sobre $y = 3x$, con $x > 0$) y otro en la parte positiva del eje X , la pendiente m de la recta r (que “cae” de izquierda a derecha) debe ser negativa.

Derivamos $A(m)$ usando la regla del cociente:

$$A'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(2m-2)(m^2-3m) - (m^2-2m+1)(2m-3)}{(m^2-3m)^2}.$$

Desarrollando el numerador (cálculo verificado):

$$(2m-2)(m^2-3m) - (m^2-2m+1)(2m-3) = -m^2 - 2m + 3 = -(m^2 + 2m - 3),$$

así que

$$A'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-(m^2 + 2m - 3)}{(m^2 - 3m)^2} = \frac{-3(m^2 + 2m - 3)}{2(m^2 - 3m)^2}.$$

Igualando a cero (el denominador nunca se anula donde A está definida): $m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$, es decir, $m = 1$ o $m = -3$.

Idea clave

De los dos puntos críticos, $m = 1$ corresponde a un triángulo degenerado (la recta r pasaría por el origen, ya que con $m = 1$ el área se anula), y además no pertenece al dominio $m < 0$. El único

candidato válido es $m = -3$.

Descartamos $m = 1$ (fuera del dominio $m < 0$, y además $A(1) = 0$, un triángulo degenerado sin sentido para el problema). Comprobamos que $m = -3$ es un mínimo con la derivada segunda o, más simplemente, viendo el comportamiento de $A(m)$ en el dominio $m < 0$: cuando $m \rightarrow 0^-$, $A(m) \rightarrow +\infty$; cuando $m \rightarrow -\infty$, $A(m) \rightarrow \frac{3}{2}$; y en $m = -3$ el valor es menor que ese límite, confirmando que se trata de un mínimo.

Calculamos el área en $m = -3$:

$$A(-3) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(-3)^2 - 2(-3) + 1}{(-3)^2 - 3(-3)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9 + 6 + 1}{9 + 9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{18} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$m = -3, \quad \text{Área mínima} = \frac{4}{3} u^2 \approx 1,333 u^2.$$

EJERCICIO 2: Sistema de ecuaciones lineales con parámetro (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{array} \right\}.$$

a (1,25 puntos) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m .

b (0,5 puntos) Resuelva el sistema para $m = 1$.

c (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando este tenga infinitas soluciones.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Igual que en otros exámenes de esta serie, reescribimos primero cada ecuación en la forma estándar, completando con coeficiente 0 las variables ausentes.

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 0y + 2z = 0 \\ 0x + my - z = m \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix}.$$

Desarrollamos el determinante por la primera fila:

$$|M| = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ m & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} m & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada determinante 2×2 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ m & -1 \end{vmatrix} = 0 - 2m = -2m, \quad \begin{vmatrix} m & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -m - 0 = -m, \quad \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} = m^2.$$

Sustituyendo:

$$|M| = 1(-2m) - 3(-m) + 1(m^2) = -2m + 3m + m^2 = m^2 + m.$$

Factorizando: $|M| = m(m + 1)$, que se anula en $m = 0$ y $m = -1$.

Caso $m \neq 0$ y $m \neq -1$: $|M| \neq 0$, luego $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 3 = n$. **Sistema compatible determinado (SCD).**

Caso $m = 0$: el sistema queda

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

La segunda y la tercera ecuación son equivalentes (ambas dicen $z = 0$). La matriz de coeficientes $M =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ tiene } \text{rg}(M) = 2 \text{ (las filas 2 y 3 son proporcionales), y la matriz ampliada mantiene } \text{rg}(M') =$$

2 (la fila 3 ampliada, $(0, 0, -1 \mid 0)$, es proporcional a la fila 2, $(0, 0, 2 \mid 0)$, sin contradicción). Como $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 2 < 3$: **sistema compatible indeterminado (SCI).**

Caso $m = -1$: el sistema queda

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ -x + 2z = 0 \\ -y - z = -1 \end{cases}$$

con matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, de rango 2 (el menor de filas 1,2 y columnas 1,3,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$). Sin embargo, la matriz ampliada tiene rango 3: no existe combinación de las dos primeras ecuaciones que reproduzca la tercera con el término independiente correcto (se puede comprobar reduciendo el sistema que aparece una contradicción del tipo $0 = k$ con $k \neq 0$). Por tanto $\text{rg}(M') = 3 \neq \text{rg}(M) = 2$: **sistema incompatible (SI).**

Resumen:

m	Tipo de sistema
$m \neq 0, -1$	SCD
$m = 0$	SCI
$m = -1$	SI

Apartado b)

Para $m = 1$, el sistema es

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ x + 2z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Idea clave

Con tres ecuaciones independientes (SCD, ya que $m = 1 \neq 0, -1$), lo más directo es despejar dos variables en función de la tercera desde las ecuaciones más simples, y sustituir en la que queda.

De la tercera ecuación: $y = z + 1$. De la segunda: $x = -2z$. Sustituyendo en la primera:

$$-2z + 3(z + 1) + z = 5 \implies -2z + 3z + 3 + z = 5 \implies 2z + 3 = 5 \implies z = 1.$$

Entonces $y = 1 + 1 = 2$ y $x = -2(1) = -2$.

$$(x, y, z) = (-2, 2, 1).$$

Apartado c)

Idea clave

El sistema tiene infinitas soluciones exactamente en el caso $m = 0$ (según el apartado a). Basta resolver el sistema con ese valor concreto de m .

Para $m = 0$:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

Las dos últimas ecuaciones dan $z = 0$. Sustituyendo en la primera: $x + 3y = 5 \implies x = 5 - 3y$.

Tomando $y = \lambda$ como parámetro libre:

$$(x, y, z) = (5 - 3\lambda, \lambda, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 3: Probabilidad (sesamoiditis) y función polinómica de beneficios (2,5 puntos)

ENUNCIADO

La lesión por sesamoiditis (inflamación del hueso sesamoideo del pie) es relativamente habitual entre la población que practica deportes de impacto (atletismo, baloncesto, tenis...). En una población de deportistas, se ha hecho un estudio diferenciando entre los que practican deportes de impacto y los que practican deportes sin impacto brusco (como natación, pilates, senderismo...). Se ha podido determinar que el 45 % practica deportes de impacto. Entre estos, un 10 % sufre lesiones por sesamoiditis, mientras que entre los que no practican deportes de impacto solo un 3 % presenta esta lesión. Escogemos un deportista al azar.

a (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que sufra sesamoiditis?

b (0,75 puntos) Si el deportista escogido tiene una lesión por sesamoiditis, ¿cuál es la probabilidad de que practique deportes de impacto?

Una empresa de calzado deportivo ha creado una zapatilla con amortiguación para minimizar las lesiones por sesamoiditis. Los beneficios generados por la venta de este producto, en miles de euros, siguen una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, donde x son los años transcurridos desde que la zapatilla salió a la venta y a , b y c son constantes reales.

c (1 punto) Calcule los valores de a , b y c sabiendo que el primer año se obtuvo el máximo de beneficios, con un valor de 8000 euros, y que el segundo año hubo un punto de inflexión en los beneficios.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Sean I = “practica deporte de impacto” y $\bar{I}$ = “no practica deporte de impacto”, con $P(I) = 0,45$ y $P(\bar{I}) = 0,55$. Sea S = “sufre sesamoiditis”. Del enunciado: $P(S | I) = 0,10$ y $P(S | \bar{I}) = 0,03$.

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(S) = P(I) \cdot P(S | I) + P(\bar{I}) \cdot P(S | \bar{I}) = 0,45 \cdot 0,10 + 0,55 \cdot 0,03 = 0,045 + 0,0165 = 0,0615.$$

$$P(\text{sesamoiditis}) = 0,0615 = \frac{123}{2000} = 6,15 \%$$

Apartado b)

Idea clave

Se pide una probabilidad “al revés” de la condicional que tenemos (dado el efecto —la lesión—, se pregunta por la causa —el tipo de deporte—): es la situación típica del teorema de Bayes.

Por el teorema de Bayes:

$$P(I | S) = \frac{P(I) \cdot P(S | I)}{P(S)} = \frac{0,45 \cdot 0,10}{0,0615} = \frac{0,045}{0,0615} = \frac{90}{123} = \frac{30}{41}.$$

$$P(\text{impacto} | \text{sesamoiditis}) = \frac{30}{41} \approx 0,732 = 73,2 \%$$

Apartado c)

Idea clave

Un máximo en $x = 1$ aporta dos condiciones a la vez: el valor de la función ahí ($f(1) = 8$, recordando que los beneficios están en miles de euros) y que la derivada se anule ($f'(1) = 0$). Un punto de inflexión en $x = 2$ aporta una tercera condición: la derivada segunda se anula ahí ($f''(2) = 0$). Con tres condiciones y tres incógnitas (a, b, c), el sistema queda determinado.

Con $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

Las tres condiciones son:

$$f(1) = a + b + c = 8 \quad (\text{beneficio de } 8000 \text{ €} = 8 \text{ miles de euros}),$$

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \quad (\text{máximo en } x = 1),$$

$$f''(2) = 12a + 2b = 0 \quad (\text{inflexión en } x = 2).$$

De la tercera ecuación: $b = -6a$.

Sustituyendo en la primera: $a - 6a + c = 8 \Rightarrow -5a + c = 8 \Rightarrow c = 8 + 5a$.

Sustituyendo en la segunda: $3a + 2(-6a) + c = 0 \Rightarrow 3a - 12a + c = 0 \Rightarrow -9a + c = 0 \Rightarrow c = 9a$.

Iguando las dos expresiones de c : $9a = 8 + 5a \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$.

Entonces $c = 9(2) = 18$ y $b = -6(2) = -12$.

Idea clave

Comprobamos con la ecuación que no hemos usado para despejar directamente cada incógnita (aquí, verificando las tres a la vez con los valores obtenidos), para confirmar que no hay errores de cálculo.

Comprobación: $f(1) = 2 - 12 + 18 = 8$ ✓; $f'(1) = 3(2) + 2(-12) + 18 = 6 - 24 + 18 = 0$ ✓; $f''(2) = 12(2) + 2(-12) = 24 - 24 = 0$ ✓.

$$a = 2, \quad b = -12, \quad c = 18.$$

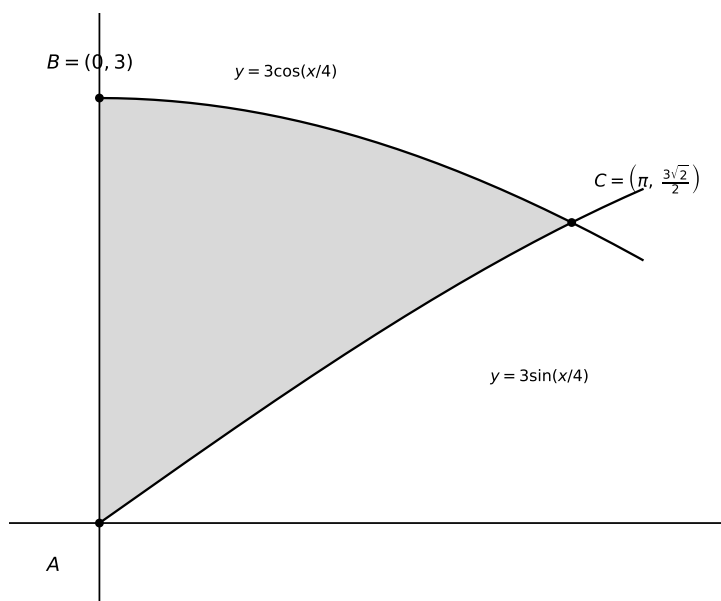
EJERCICIO 4: Escoja UNA de las dos opciones (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Escoja UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

Opción A

Un vidriero está reparando uno de los vitrales de la Sagrada Familia cuya forma es la de la parte sombreada de la figura adjunta. Se ha dado cuenta de que Gaudí lo diseñó de manera que uno de los lados sigue la función $y = 3 \sin(x/4)$ y otro sigue la función $y = 3 \cos(x/4)$, donde x e y están expresadas en metros.



a (1 punto) Razone a qué función corresponde cada gráfica y calcule las coordenadas de los puntos B y C señalados en la figura (teniendo en cuenta que A es el origen de coordenadas).

b (1,5 puntos) Calcule el precio del vitral sabiendo que cuesta 750 €/m^2 .

Opción B

Considere el plano $\pi : 2x - y + z = 5$ y el punto $P = (0, 1, 3)$.

a (0,5 puntos) Compruebe que la distancia del punto P al plano π es $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b (0,75 puntos) Encuentre la ecuación general de un plano π_1 paralelo a π y que pase por el punto P .
¿Cuál es la distancia entre π_1 y π ?

c (1,25 puntos) Encuentre la ecuación general de un segundo plano π_2 , diferente de π_1 , que sea paralelo a π y que esté a una distancia $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π .

SOLUCIÓN

Resolvemos primero la Opción A.

Apartado a)

Idea clave

Para distinguir las dos gráficas basta evaluar ambas funciones en $x = 0$: la que vale 0 pasa por el origen (A), y la que vale 3 corta al eje Y en un punto distinto (B).

En $x = 0$: $3 \sin(0/4) = 0$ y $3 \cos(0/4) = 3$. Como A es el origen $(0, 0)$, la curva que pasa por A es

$y = 3 \sin(x/4)$ (vale 0 en $x = 0$). La otra curva, $y = 3 \cos(x/4)$, corta al eje Y en el punto $B = (0, 3)$, ya que en $x = 0$ vale 3.

$$B = (0, 3).$$

Idea clave

El punto C es la intersección de las dos curvas: el punto donde ambas funciones coinciden.

Para hallar C , igualamos las dos funciones:

$$3 \sin(x/4) = 3 \cos(x/4) \implies \tan(x/4) = 1 \implies \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} \implies x = \pi$$

(tomando la primera solución positiva, coherente con la posición de C en la figura).

La ordenada es $y = 3 \sin(\pi/4) = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$C = \left(\pi, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \approx (3,1416, 2,1213).$$

Apartado b)

Idea clave

El área de la región sombreada (entre A , B y C) es el área comprendida entre las dos curvas, desde $x = 0$ (donde ambas están separadas por el segmento AB) hasta $x = \pi$ (donde se cortan en C). Basta integrar la diferencia entre la curva superior ($y = 3 \cos(x/4)$, que vale más en $x = 0$) y la inferior ($y = 3 \sin(x/4)$).

$$\text{Área} = \int_0^{\pi} [3 \cos(x/4) - 3 \sin(x/4)] dx = \left[12 \sin(x/4) + 12 \cos(x/4) \right]_0^{\pi}.$$

En $x = \pi$: $12 \sin(\pi/4) + 12 \cos(\pi/4) = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$.

En $x = 0$: $12 \sin(0) + 12 \cos(0) = 0 + 12 = 12$.

$$\text{Área} = 12\sqrt{2} - 12 = 12(\sqrt{2} - 1) \approx 4,971 \text{ m}^2.$$

El precio del vitral es:

$$\text{Precio} = 750 \cdot 12(\sqrt{2} - 1) = 9000(\sqrt{2} - 1) \approx 3727,9 \text{ €}.$$

$$\text{Precio} = 9000(\sqrt{2} - 1) \approx 3727,92 \text{ €}.$$

Resolvemos ahora la Opción B.

Apartado a)

Idea clave

La distancia de un punto a un plano se calcula sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano (llevada a la forma $ax + by + cz + d = 0$) y dividiendo por el módulo del vector normal.

Escribimos π como $2x - y + z - 5 = 0$, con normal $\vec{n}_\pi = (2, -1, 1)$, $\|\vec{n}_\pi\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$.

$$d(P, \pi) = \frac{|2(0) - 1(1) + 1(3) - 5|}{\sqrt{6}} = \frac{|0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{6}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

que es precisamente el valor que había que comprobar. ■

Apartado b)**Idea clave**

Un plano paralelo a π comparte el mismo vector normal; basta imponer que pase por P para fijar el término independiente.

El plano π_1 , paralelo a π (mismo normal $(2, -1, 1)$) y que pasa por $P(0, 1, 3)$:

$$2(x - 0) - 1(y - 1) + 1(z - 3) = 0 \implies 2x - y + 1 + z - 3 = 0 \implies \boxed{2x - y + z - 2 = 0}.$$

Como π_1 es, precisamente, el plano paralelo a π que pasa por P , la distancia entre π_1 y π es la misma que la distancia de P a π , ya calculada en el apartado a):

$$\boxed{d(\pi_1, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{2}}.$$

Apartado c)**Idea clave**

Todos los planos paralelos a π tienen la forma $2x - y + z = k$. La distancia de cualquiera de ellos a π (que corresponde a $k = 5$) es $\frac{|k - 5|}{\sqrt{6}}$: busquemos los valores de k que hacen esa distancia igual a $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Habrá, en general, dos soluciones (una a cada lado de π), y π_1 ya es una de ellas.

Planteamos $\frac{|k - 5|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, es decir, $|k - 5| = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Entonces $k - 5 = 3$ o $k - 5 = -3$, es decir, $k = 8$ o $k = 2$.

El valor $k = 2$ corresponde exactamente a π_1 (ecuación $2x - y + z = 2$, la del apartado b). El otro valor, $k = 8$, da el segundo plano pedido:

$$\boxed{\pi_2 : 2x - y + z - 8 = 0}.$$