

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Andalucía -- Extraordinaria 2024

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad y Pruebas de Admisión – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Curso 2023–2024.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- e) Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = a + b \cos(x) + c \sin(x).$$

Halla a , b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

SOLUCIÓN

Idea clave

La condición “ $y = 1$ es tangente en $x = \pi/2$ ” aporta dos datos, no uno: la pendiente de la tangente debe coincidir con la de la recta (0, porque $y = 1$ es horizontal), y además el punto de tangencia debe estar sobre esa recta, es decir $f(\pi/2) = 1$. La segunda condición del enunciado (que la recta $y = x - 1$ “corta” a la gráfica en $x = 0$) solo exige que ambas curvas coincidan en ese punto, sin ninguna condición sobre la pendiente.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = -b \operatorname{sen}(x) + c \cos(x).$$

Condición 1 (pendiente): la pendiente de $y = 1$ es 0, así que:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b(1) + c(0) = -b = 0 \implies b = 0.$$

Condición 2 (punto de tangencia sobre $y = 1$):

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + 0 + c = a + c.$$

Iguamos a 1: $a + c = 1$.

Condición 3 (corte con $y = x - 1$ en $x = 0$): el valor de la recta en $x = 0$ es $0 - 1 = -1$, así que $f(0) = -1$:

$$f(0) = a + b \cos(0) + c \operatorname{sen}(0) = a + b = a \quad (\text{ya que } b = 0).$$

Iguamos a -1: $a = -1$.

De $a + c = 1$ con $a = -1$: $c = 1 - (-1) = 2$.

Los valores pedidos son $a = -1$, $b = 0$, $c = 2$.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

a) [1,5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

b) [1 punto] Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

SOLUCIÓN

Apartado a)

Derivamos con la regla del producto:

$$f'(x) = e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2} \left[1 - 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = e^{-x^2} (-2x^2 + x + 1).$$

Idea clave

Como $e^{-x^2} > 0$ para todo x , el signo de $f'(x)$ coincide exactamente con el signo del polinomio $-2x^2 + x + 1$: no hace falta preocuparse por el factor exponencial.

Igualamos a cero: $-2x^2 + x + 1 = 0$, o equivalentemente $2x^2 - x - 1 = 0$. Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \implies x = 1 \text{ o } x = -\frac{1}{2}.$$

Estudiamos el signo de $-2x^2 + x + 1$ en los tres intervalos que determinan estas raíces:

- Si $x < -\frac{1}{2}$ (por ejemplo, $x = -1$): $-2(1) + (-1) + 1 = -2 < 0$, luego $f'(x) < 0$ (**decreciente**).
- Si $-\frac{1}{2} < x < 1$ (por ejemplo, $x = 0$): $-0 + 0 + 1 = 1 > 0$, luego $f'(x) > 0$ (**creciente**).
- Si $x > 1$ (por ejemplo, $x = 2$): $-8 + 2 + 1 = -5 < 0$, luego $f'(x) < 0$ (**decreciente**).

f es decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$, creciente en $(-\frac{1}{2}, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.

Apartado b)

Del apartado anterior, f tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{2}$ (pasa de decreciente a creciente) y un máximo relativo en $x = 1$ (pasa de creciente a decreciente).

Idea clave

Para saber si estos extremos relativos son además absolutos, necesitamos comparar sus valores con el comportamiento de f en los extremos del dominio ($x \rightarrow \pm\infty$). Como la exponencial e^{-x^2} domina completamente al factor lineal $x - \frac{1}{2}$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, tenemos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Calculamos los valores en los puntos críticos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{-1/4} = -e^{-1/4} \approx -0,779.$$

$$f(1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)e^{-1} = \frac{1}{2e} \approx 0,184.$$

Como f decrece desde 0 (en $-\infty$) hasta $-e^{-1/4}$, luego crece hasta $\frac{1}{2e}$, y finalmente decrece de nuevo hacia 0 (en $+\infty$) sin volver a cruzar estos valores, estos dos extremos relativos son también los extremos absolutos.

Mínimo absoluto en $x = -\frac{1}{2}$, con valor $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -e^{-1/4} \approx -0,779$. **Máximo absoluto** en $x = 1$, con valor $f(1) = \frac{1}{2e} \approx 0,184$.

BLOQUE B

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

a) [1 punto] Halla los puntos de intersección de las gráficas de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) [1,5 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

Como g está definida con un valor absoluto, hay que distinguir dos tramos según el signo de $x^2 - 1$: para $|x| \geq 1$, $g(x) = x^2 - 1$; para $|x| < 1$, $g(x) = 1 - x^2$. Buscamos las intersecciones en cada tramo por separado.

Tramo $|x| \geq 1$ (donde $g(x) = x^2 - 1$):

$$-x^2 + 7 = x^2 - 1 \implies 8 = 2x^2 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2.$$

Ambos valores cumplen $|x| \geq 1$, así que son válidos.

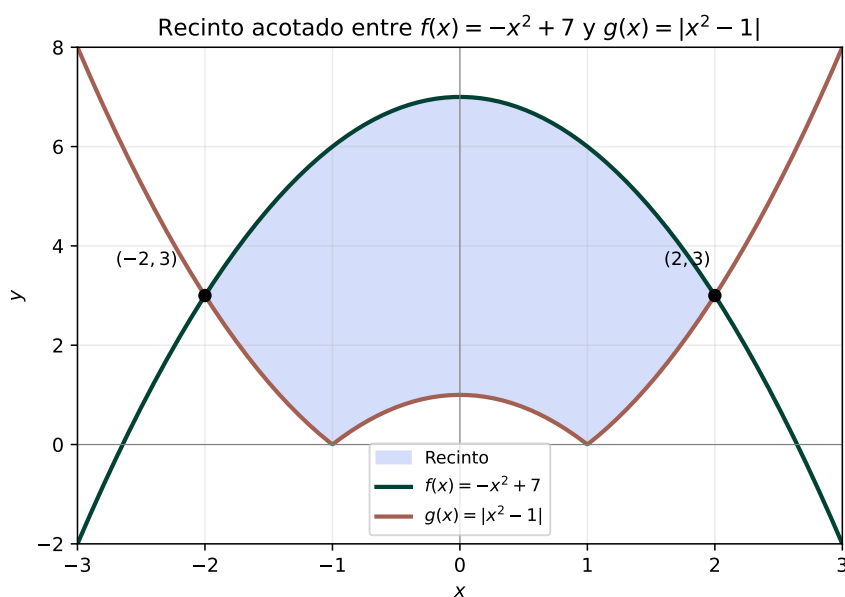
Tramo $|x| < 1$ (donde $g(x) = 1 - x^2$):

$$-x^2 + 7 = 1 - x^2 \implies 7 = 1,$$

que es una contradicción: no hay solución en este tramo.

Calculamos las ordenadas: $f(\pm 2) = -4 + 7 = 3$.

Los puntos de intersección son $(-2, 3)$ y $(2, 3)$.



Apartado b)

Idea clave

Antes de integrar, comprobamos en qué tramo $f \geq g$ (el recinto acotado es donde una gráfica queda por encima de la otra entre los puntos de corte). En $x = 0$: $f(0) = 7$, $g(0) = |-1| = 1$, luego $f > g$ en el centro del recinto. El recinto acotado es, por tanto, la región entre $x = -2$ y $x = 2$ donde $f(x) \geq g(x)$.

Como ambas funciones son pares (simétricas respecto al eje Y), calculamos el área como el doble de la integral entre 0 y 2, separando de nuevo en los dos tramos de g :

$$\text{Área} = 2 \left[\int_0^1 (f(x) - (1 - x^2)) dx + \int_1^2 (f(x) - (x^2 - 1)) dx \right].$$

Calculamos el primer integrando:

$$f(x) - (1 - x^2) = (-x^2 + 7) - (1 - x^2) = 6.$$

$$\int_0^1 6 dx = 6.$$

Calculamos el segundo integrando:

$$f(x) - (x^2 - 1) = (-x^2 + 7) - (x^2 - 1) = -2x^2 + 8.$$

$$\int_1^2 (-2x^2 + 8) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_1^2 = \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) - \left(-\frac{2}{3} + 8 \right) = \frac{32}{3} - \frac{22}{3} = \frac{10}{3}.$$

Sumamos y multiplicamos por 2:

$$\text{Área} = 2 \left(6 + \frac{10}{3} \right) = 2 \left(\frac{18 + 10}{3} \right) = 2 \cdot \frac{28}{3} = \frac{56}{3}.$$

El área del recinto es $\frac{56}{3} \text{ u}^2 \approx 18,67 \text{ u}^2$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Halla $\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx$.

SOLUCIÓN**Idea clave**

Esta integral es del tipo “cíclico”: al integrar por partes dos veces, reaparece la integral original, lo que permite despejarla algebraicamente en vez de seguir integrando indefinidamente.

Integramos por partes con $u = \cos(x)$ ($du = -\sin(x) dx$) y $dv = e^x dx$ ($v = e^x$):

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

Integramos de nuevo por partes la integral resultante, con $u = \sin(x)$ ($du = \cos(x) dx$) y $dv = e^x dx$ ($v = e^x$):

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

Sustituyendo en la primera expresión, llamamos $I = \int e^x \cos(x) dx$:

$$I = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - I.$$

Idea clave

La misma integral I aparece en ambos lados de la igualdad: podemos despejarla como si fuera una simple incógnita algebraica.

Despejamos I :

$$2I = e^x (\cos(x) + \sin(x)) \implies I = \frac{e^x (\cos(x) + \sin(x))}{2} + C.$$

Evaluamos la integral definida:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = \left[\frac{e^x (\cos(x) + \sin(x))}{2} \right]_0^{\pi/2}.$$

En $x = \pi/2$: $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$:

$$\frac{e^{\pi/2}(0+1)}{2} = \frac{e^{\pi/2}}{2}.$$

En $x = 0$: $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$:

$$\frac{e^0(1+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Restando:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos(x) dx = \frac{e^{\pi/2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2} \approx 1,905.$$

El valor de la integral es $\frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$.

BLOQUE C

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1,25 puntos] Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) [1,25 puntos] Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su

diagonal principal es cero y tienen determinante -1 .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Escribimos $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ genérica y calculamos ambos lados de la ecuación $XA = -AX^t$.

$$XA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & q \\ -r & s \end{pmatrix}.$$

$$X^t = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}, \quad AX^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & -r \\ q & s \end{pmatrix}, \quad -AX^t = \begin{pmatrix} p & r \\ -q & -s \end{pmatrix}.$$

Igualemos $XA = -AX^t$ entrada a entrada:

$$\begin{pmatrix} -p & q \\ -r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r \\ -q & -s \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -p = p \\ q = r \\ -r = -q \\ s = -s \end{cases} \implies p = 0, s = 0, q = r.$$

Idea clave

Las condiciones $-p = p$ y $s = -s$ solo se cumplen si $p = 0$ y $s = 0$ (en los reales). La condición $q = r$ (junto con $-r = -q$, que dice lo mismo) deja $q = r$ libre por ahora: la segunda ecuación matricial, $X^2 = I$, es la que finalmente lo fija.

Así, $X = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix}$ para cierto q . Imponemos ahora $X^2 = I$:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q \\ q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix} = q^2 I.$$

Igualemos a I : $q^2 = 1 \implies q = \pm 1$.

Las matrices pedidas son $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Apartado b)

Escribimos $Y = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ e imponemos $YA = AY$:

$$YA = \begin{pmatrix} -p & q \\ -r & s \end{pmatrix}, \quad AY = \begin{pmatrix} -p & -q \\ r & s \end{pmatrix}.$$

Igualemos: $q = -q \implies q = 0$; $-r = r \implies r = 0$.

Idea clave

La condición de conmutar con A (una matriz diagonal con entradas distintas) obliga a que Y sea también diagonal: es un hecho general que toda matriz que conmuta con una matriz diagonal de entradas distintas debe ser diagonal.

Así, $Y = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$. Imponemos traza cero:

$$p + s = 0 \implies s = -p.$$

Imponemos determinante -1 :

$$\det(Y) = p \cdot s = p(-p) = -p^2 = -1 \implies p^2 = 1 \implies p = \pm 1.$$

Si $p = 1$: $s = -1$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $p = -1$: $s = 1$, $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Las matrices pedidas son $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $Y = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.

- a) [1,25 puntos] ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?
- b) [1,25 puntos] Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

SOLUCIÓN

Llamamos A , B , C a los precios unitarios de cada tipo de perfume. Los datos del enunciado son:

$$20A + 30B + 15C = 2200, \quad 15A + 10B + 10C = 1250.$$

Apartado a)

Idea clave

Tenemos 2 ecuaciones con 3 incógnitas: no podemos hallar A , B , C por separado. Sin embargo, si el pedido preguntado $(25, 10, 16)$ resulta ser combinación lineal de los dos pedidos conocidos $(20, 30, 15)$ y $(15, 10, 10)$, sí podremos calcular su coste sin necesidad de conocer los precios indivi-

duales: basta con combinar los dos importes totales con los mismos coeficientes.

Buscamos λ, μ tales que:

$$\lambda(20, 30, 15) + \mu(15, 10, 10) = (25, 10, 16).$$

Esto da el sistema:

$$\begin{cases} 20\lambda + 15\mu = 25 \\ 30\lambda + 10\mu = 10 \end{cases} \implies \begin{cases} 4\lambda + 3\mu = 5 \\ 3\lambda + \mu = 1 \end{cases}.$$

De la segunda ecuación: $\mu = 1 - 3\lambda$. Sustituyendo en la primera:

$$4\lambda + 3(1 - 3\lambda) = 5 \implies 4\lambda + 3 - 9\lambda = 5 \implies -5\lambda = 2 \implies \lambda = -\frac{2}{5}.$$

$$\text{Entonces } \mu = 1 - 3\left(-\frac{2}{5}\right) = 1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5}.$$

Idea clave

Antes de usar estos coeficientes, comprobamos que también reproducen la tercera coordenada (los perfumes tipo C): si no coincidiera, el pedido preguntado no sería combinación lineal de los otros dos y no podríamos resolver el apartado con los datos disponibles.

Comprobamos la tercera coordenada:

$$15\lambda + 10\mu = 15\left(-\frac{2}{5}\right) + 10\left(\frac{11}{5}\right) = -6 + 22 = 16 \quad \checkmark$$

Como coincide, aplicamos los mismos coeficientes a los importes totales:

$$\text{Coste} = \lambda(2200) + \mu(1250) = -\frac{2}{5}(2200) + \frac{11}{5}(1250) = -880 + 2750 = 1870.$$

El pedido de 25 tipo A, 10 tipo B y 16 tipo C cuesta 1870 euros.

Apartado b)

Añadimos la condición $C = \frac{2}{5}A$ y la sustituimos en las dos ecuaciones originales:

$$20A + 30B + 15\left(\frac{2}{5}A\right) = 2200 \implies 20A + 30B + 6A = 2200 \implies 26A + 30B = 2200.$$

$$15A + 10B + 10\left(\frac{2}{5}A\right) = 1250 \implies 15A + 10B + 4A = 1250 \implies 19A + 10B = 1250.$$

De la segunda ecuación: $10B = 1250 - 19A \implies B = 125 - 1,9A$.

Sustituimos en la primera:

$$26A + 30(125 - 1,9A) = 2200 \implies 26A + 3750 - 57A = 2200 \implies -31A = -1550 \implies A = 50.$$

Entonces:

$$B = 125 - 1,9(50) = 125 - 95 = 30, \quad C = \frac{2}{5}(50) = 20.$$

Comprobación: $20(50) + 30(30) + 15(20) = 1000 + 900 + 300 = 2200$ ¤; $15(50) + 10(30) + 10(20) = 750 + 300 + 200 = 1250$ ¤.

Los precios son: perfume A, 50€; perfume B, 30€; perfume C, 20€.

BLOQUE D

Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

- a) [1 punto] Estudia la posición relativa de π y r .
- b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r .

SOLUCIÓN

Apartado a)

El plano π tiene normal $\vec{n}_\pi = (1, -2, 1)$; la recta r tiene dirección $\vec{d}_r = (2, 1, 0)$.

Idea clave

Comparamos primero $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi$: si es distinto de cero, la recta corta al plano en un único punto; si es cero, la recta es paralela al plano o está contenida en él, y hay que comprobar además si algún punto de la recta pertenece al plano.

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 2(1) + 1(-2) + 0(1) = 2 - 2 = 0.$$

Como el producto escalar es cero, la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto de r con $\lambda = 0$, es decir $P_0 = (1, 0, 1)$, pertenece a π :

$$1 - 2(0) + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \quad \text{¤}$$

Como el punto sí pertenece al plano, y la dirección de la recta es paralela a él, la recta r está contenida en el plano π .

Apartado b)

Comprobamos primero que $P(2, -1, -2)$ pertenece a π :

$$2 - 2(-1) + (-2) - 2 = 2 + 2 - 2 - 2 = 0 \quad \text{¤}$$

Idea clave

Buscamos una recta contenida en π (su dirección debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi$) y perpendicular a r (su dirección debe ser perpendicular a $\vec{d}_r$). El único vector (salvo múltiplos) perpendicular simultáneamente a $\vec{n}_\pi$ y a $\vec{d}_r$ es su producto vectorial.

Calculamos la dirección de la recta pedida:

$$\vec{d} = \vec{n}_\pi \times \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ((-2)(0) - 1(1), -[1(0) - 1(2)], 1(1) - (-2)(2)) = (-1, 2, 5).$$

Comprobación: $\vec{d} \cdot \vec{d}_r = (-1)(2) + 2(1) + 5(0) = 0$ (perpendicular a r); $\vec{d} \cdot \vec{n}_\pi = (-1)(1) + 2(-2) + 5(1) = -1 - 4 + 5 = 0$ (contenida en π , ya que es perpendicular a la normal).

La recta pedida es:

$$(x, y, z) = (2, -1, -2) + \mu(-1, 2, 5), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B .

SOLUCIÓN**Idea clave**

El plano OXZ es el plano $y = 0$. Buscamos puntos $P = (x, 0, z)$ tales que P , A y B formen un triángulo equilátero, es decir, que las tres distancias PA , PB y AB sean iguales. Como AB ya es un dato fijo, esto se traduce en dos ecuaciones: $|PA| = |AB|$ y $|PB| = |AB|$.

Calculamos primero la distancia $|AB|$:

$$|AB| = \sqrt{(4-0)^2 + (0-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}.$$

Sea $P = (x, 0, z)$ un punto genérico del plano OXZ . Imponemos $|PA|^2 = |AB|^2 = 20$:

$$(x-4)^2 + 0^2 + z^2 = 20 \implies x^2 - 8x + 16 + z^2 = 20 \implies x^2 + z^2 = 8x + 4. \quad (1)$$

Imponemos $|PB|^2 = 20$:

$$(x-0)^2 + (0-2)^2 + (z-0)^2 = 20 \implies x^2 + 4 + z^2 = 20 \implies x^2 + z^2 = 16. \quad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$8x + 4 = 16 \implies 8x = 12 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Sustituyendo en (2):

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + z^2 = 16 \implies \frac{9}{4} + z^2 = 16 \implies z^2 = 16 - \frac{9}{4} = \frac{64 - 9}{4} = \frac{55}{4} \implies z = \pm \frac{\sqrt{55}}{2}.$$

Comprobación (con $x = 3/2$, $z = \sqrt{55}/2$): $|PA|^2 = (3/2 - 4)^2 + (\sqrt{55}/2)^2 = (25/4) + (55/4) = 80/4 = 20$
 $\boxtimes$; $|PB|^2 = (3/2)^2 + 4 + (\sqrt{55}/2)^2 = 9/4 + 16/4 + 55/4 = 80/4 = 20 \boxtimes$.

Existen dos puntos que cumplen la condición:

$$P_1 = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{55}}{2}\right), \quad P_2 = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{55}}{2}\right).$$
