

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Extraordinaria 2026

Matemáticas II

Serie 1

Baremo e instrucciones

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, hay que indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates

El enunciado oficial pide responder a 4 de las 6 cuestiones. Por completitud pedagógica, en este material resolvemos las 6 cuestiones.

PREGUNTA 1: Discusión de un sistema lineal con parámetro**ENUNCIADO**

Considerad el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad (1)$$

a (1,25 puntos) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

b (1,25 puntos) Resolved, si es posible, el sistema para el caso $k = 1$, y haced una interpretación geométrica.

SOLUCIÓN

a) Discusión.

La matriz de coeficientes y su determinante son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = -(k-1)(k-3). \quad (2)$$

Idea clave

El determinante factoriza en dos raíces enteras limpias: $k = 1$ y $k = 3$. Son los únicos valores que requieren estudio aparte.

Si $k \neq 1, 3$: $|A| \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3$. El sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Si $k = 1$: se comprueba que $\text{rg}(A) = 2$ (por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, pero el determinante completo se anula), y también $\text{rg}(A') = 2$. El sistema es **compatible indeterminado (SCI)**.

Si $k = 3$: de nuevo $\text{rg}(A) = 2$, pero ahora $\text{rg}(A') = 3$ (el término independiente rompe la relación de dependencia). El sistema es **incompatible (SI)**.

b) Resolución para $k = 1$ e interpretación geométrica.

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad (3)$$

Las dos primeras ecuaciones son idénticas, así que el sistema equivale a

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad (4)$$

Tomamos $z = \lambda$ como parámetro. Restando la primera de la segunda:

$$2y = 1 \implies y = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Sustituyendo en la primera:

$$x + \frac{1}{2} + \lambda = 4 \implies x = \frac{7}{2} - \lambda. \quad (6)$$

La solución es

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{2} - \lambda, \frac{1}{2}, \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Idea clave

Geoméricamente, el sistema representa tres planos en el espacio. Al ser compatible indeterminado con un único parámetro libre, la solución es una recta: los tres planos (en realidad, solo dos distintos, ya que dos de las ecuaciones son idénticas) se cortan a lo largo de esa recta común.

Como las ecuaciones 1.^a y 2.^a representan el *mismo* plano, en realidad tenemos dos planos distintos que se cortan en una recta: la que hemos parametrizado arriba.

PREGUNTA 2: Tangente, normal y área con $f(x) = 4/x$ **ENUNCIADO**

a (1,25 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calculad la ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encontrad también la ecuación de la recta normal a $y = f(x)$ en ese mismo punto.

b (1,25 puntos) Haced un esbozo de las gráficas de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calculad el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta vertical $x = 3$.

SOLUCIÓN

a) **Tangente y normal en $x = 1$.**

$$f(1) = 4, \quad f'(x) = -\frac{4}{x^2}, \quad f'(1) = -4. \quad (8)$$

Recta tangente:

$$y - 4 = -4(x - 1) \implies y = -4x + 8 \implies 4x + y = 8. \quad (9)$$

Idea clave

Fijaos en que la tangente en $x = 1$ es exactamente la recta $4x + y = 8$ que aparece en el apartado b): no es casualidad, el enunciado está construido así para que podamos reutilizar este resultado.

Recta normal (pendiente $= -\frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$):

$$y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1) \implies y = \frac{x}{4} + \frac{15}{4} \implies x - 4y + 15 = 0. \quad (10)$$

b) **Esbozo y área.**

Comprobamos primero la posición relativa de la curva y la recta:

$$f(x) - (8 - 4x) = \frac{4}{x} - 8 + 4x = \frac{4x^2 - 8x + 4}{x} = \frac{4(x - 1)^2}{x}. \quad (11)$$

Para $x > 0$, esta expresión es siempre ≥ 0 (y se anula únicamente en $x = 1$): la recta es **tangente** a la curva, y la curva queda siempre por encima de la recta.

Idea clave

La recta $4x + y = 8$ corta al eje X en $x = 2$ (ya que $8 - 4x = 0 \implies x = 2$). Para $x < 2$ la recta está por encima del eje X ; para $x > 2$, por debajo. Como el área pedida está delimitada también por el eje de abscisas, la frontera inferior de la región cambia en $x = 2$: entre $x = 1$ y $x = 2$ es la recta, y entre $x = 2$ y $x = 3$ es el propio eje X .

Dividimos el área en dos tramos:

$$\text{Área} = \int_1^2 [f(x) - (8 - 4x)] dx + \int_2^3 f(x) dx. \quad (12)$$

Primer tramo:

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 8 + 4x \right) dx = \left[4 \ln x - 8x + 2x^2 \right]_1^2 = (4 \ln 2 - 8) - (-6) = 4 \ln 2 - 2. \quad (13)$$

Segundo tramo:

$$\int_2^3 \frac{4}{x} dx = \left[4 \ln x \right]_2^3 = 4 \ln 3 - 4 \ln 2. \quad (14)$$

Sumando:

$$\text{Área} = (4 \ln 2 - 2) + (4 \ln 3 - 4 \ln 2) = 4 \ln 3 - 2 \approx 2,39 \text{ u}^2. \quad (15)$$

PREGUNTA 3: Coplanariedad y volumen de un tetraedro

ENUNCIADO

En $\mathbb{R}^3$ se dan los puntos $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (4, 1, 2)$ y $D = (1, 1, t)$, donde t es un valor real.

a (1 punto) ¿Para qué valor de t los cuatro puntos son coplanarios?

b (1,5 puntos) Encontrad el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de 5 u^3 .

Nota: El volumen de un tetraedro definido por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores.

SOLUCIÓN

a) Valor de t para la coplanariedad.

Formamos tres vectores con origen en A :

$$\vec{AB} = (-3, -1, 0), \quad \vec{AC} = (1, 0, 1), \quad \vec{AD} = (-2, 0, t - 1). \quad (16)$$

Idea clave

Cuatro puntos son coplanarios exactamente cuando el producto mixto (determinante) de los tres vectores que forman es cero: geométricamente, significa que no "abarcan" volumen.

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t + 1. \quad (17)$$

Igualando a cero: $t = -1$.

b) Valor de t para volumen 5 u^3 .

Con el mismo determinante $t + 1$ calculado arriba:

$$V = \frac{1}{6}|t + 1| = 5 \implies |t + 1| = 30 \implies t + 1 = 30 \text{ o } t + 1 = -30. \quad (18)$$

Por tanto hay dos soluciones:

$$t = 29 \quad \text{o} \quad t = -31. \quad (19)$$

PREGUNTA 4: De la gráfica de f a la gráfica de f' ; inflexión de una cúbica

ENUNCIADO

a (1,25 puntos) En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x)$ (ver enunciado original). Representad de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explicad el razonamiento que habéis seguido.

b (1,25 puntos) Calculad los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de

inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y su derivada en ese punto sea $-\frac{3}{2}$.

SOLUCIÓN

a) De la gráfica de f a la gráfica de f' .

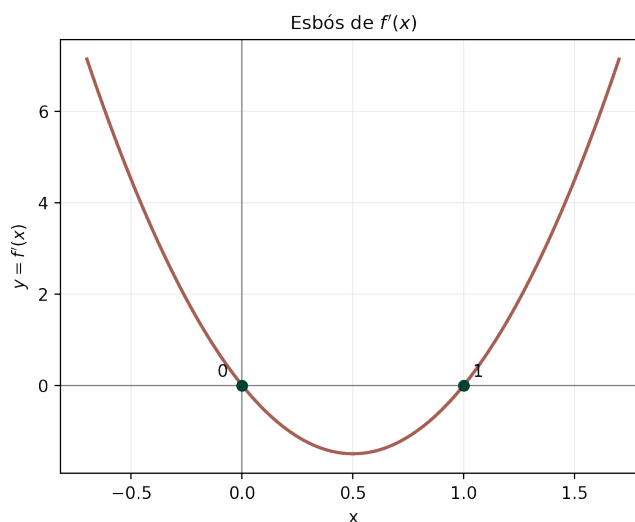
Idea clave

No hace falta conocer la expresión algebraica de f : basta con leer en la gráfica dónde f crece, decrece, y dónde tiene tangente horizontal (máximos o mínimos). Cada uno de esos rasgos se traduce directamente en información sobre el signo y los ceros de f' .

De la gráfica de $f(x)$ observamos:

- f tiene un **máximo relativo** en $x = 0$ (con $f(0) = 1$): por tanto $f'(0) = 0$, y f' pasa de positiva (para $x < 0$) a negativa (para $x > 0$).
- f tiene un **mínimo relativo** en $x = 1$ (con $f(1) = 0$): por tanto $f'(1) = 0$, y f' pasa de negativa (para $0 < x < 1$) a positiva (para $x > 1$).
- Fuera del intervalo $(0, 1)$, f es creciente, así que $f' > 0$.

Por tanto, la gráfica de $f'(x)$ debe ser una curva que: es positiva para $x < 0$, se anula en $x = 0$, es negativa en $(0, 1)$, se anula en $x = 1$, y vuelve a ser positiva para $x > 1$ — es decir, tiene la forma de una parábola con las ramas hacia arriba y raíces en $x = 0$ y $x = 1$.



Esbozo esquemático de $f'(x)$: parábola con ramas hacia arriba, raíces en $x = 0$ y $x = 1$.

b) Valores de a y b .

Idea clave

”Punto de inflexión en $x = x_0$ ” se traduce en $g''(x_0) = 0$. Junto con el dato de la derivada en ese punto, tenemos dos ecuaciones para las dos incógnitas a, b .

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx, \quad g''(x) = 6ax + 2b. \quad (20)$$

Condición de inflexión en $x = \frac{1}{2}$:

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = 3a + 2b = 0. \quad (\text{i})$$

Condición sobre la derivada:

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3a}{4} + b = -\frac{3}{2}. \quad (\text{ii})$$

De (i): $b = -\frac{3a}{2}$. Sustituyendo en (ii):

$$\frac{3a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{3}{2} \implies -\frac{3a}{4} = -\frac{3}{2} \implies a = 2. \quad (21)$$

Entonces $b = -\frac{3 \cdot 2}{2} = -3$.

$$a = 2, \quad b = -3, \quad g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1. \quad (22)$$

Idea clave

Esta función $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ es, de hecho, exactamente la $f(x)$ del apartado a): tiene máximo en $(0, 1)$ y mínimo en $(1, 0)$, tal como se observaba en la gráfica. El examen está construido para que ambos apartados se refuercen mutuamente.

PREGUNTA 5: Invertibilidad de una matriz con parámetro y ecuación matricial

ENUNCIADO

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a (1 punto) Encontrad para qué valores de a la matriz A es invertible.

b (1,5 puntos) Comprobad que, para el caso $a = 3$, la matriz A es invertible y resolved la ecuación matricial $AX = B - 3I$, donde B es la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

a) Valores de a para los que A es invertible.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = a^3 - 3a^2 + 2a = a(a-1)(a-2). \quad (23)$$

A es invertible cuando $|A| \neq 0$, es decir:

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}. \quad (24)$$

b) Caso $a = 3$: comprobación e resolución.

Para $a = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Como $3 \notin \{0, 1, 2\}$, A es invertible; en efecto, $|A| = 6 \neq 0$.

Calculamos el lado derecho:

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Idea clave

Fijaos en que $B - 3I$ tiene todas las filas "proporcionales" (cada fila es constante): esto ya anticipa que la solución X también tendrá una estructura muy regular.

Despejamos $X = A^{-1}(B - 3I)$. Calculando la inversa de A y multiplicando:

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

PREGUNTA 6: Puntos críticos y raíz única de $f(x) = x^3/(x-2)$

ENUNCIADO

Considerad la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

a (1,5 puntos) Estudiad si tiene puntos críticos y, en caso de que tenga, justificad de qué tipo son. Determinad también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b (1 punto) Comprobad que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.

SOLUCIÓN

a) Puntos críticos, tipo y monotonía.

El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2) - x^3}{(x-2)^2} = \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}. \quad (28)$$

Los puntos críticos (donde $f' = 0$) son $x = 0$ (raíz doble) y $x = 3$.

Idea clave

El factor x^2 en el numerador nunca cambia de signo (siempre ≥ 0), y $(x-2)^2$ tampoco (siempre > 0 donde está definida). Por tanto, el signo de $f'(x)$ depende *únicamente* del factor $(x-3)$: esto significa que f' no cambia de signo en $x = 0$, aunque se anule ahí.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	-	-	+

Como f' **no cambia de signo** en $x = 0$ (es negativa a ambos lados), en $x = 0$ hay un punto crítico que **no es un extremo relativo** (es un punto de tangente horizontal, de tipo "silla" para una función de una variable).

En $x = 3$, f' pasa de negativa a positiva: hay un **mínimo relativo**, con $f(3) = \frac{27}{1} = 27$.

Monotonía: f es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, 3)$ y creciente en $(3, +\infty)$.

b) **Única solución de $f(x) = 0$ en $(-2, 1)$.**

Idea clave

Combinamos el Teorema de Bolzano (para garantizar que existe al menos una raíz) con la monotonía estricta del apartado a) (para garantizar que no puede haber más de una).

f es continua en $[-2, 1]$ (ya que $2 \notin [-2, 1]$). Evaluamos en los extremos:

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = 2 > 0, \quad f(1) = \frac{1}{1-2} = -1 < 0. \quad (29)$$

Como f cambia de signo y es continua en $[-2, 1]$, por el **Teorema de Bolzano** existe al menos un punto $c \in (-2, 1)$ con $f(c) = 0$.

Además, $(-2, 1) \subset (-\infty, 2)$, intervalo donde (según el apartado a) f es estrictamente decreciente (el único punto donde $f' = 0$ dentro de este intervalo es $x = 0$, pero sin cambio de signo, así que f sigue siendo estrictamente decreciente en todo el intervalo). Una función estrictamente decreciente no puede anularse dos veces.

Por tanto, la solución de $f(x) = 0$ en $(-2, 1)$ es **única**.