

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Extraordinaria 2023

Matemáticas II

Sèrie 2

Baremo e instruccions

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, es necesario que lo indiquéis claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates: el examen original permite elegir 4 de las 6 cuestiones. Como recurso de estudio, aquí resolvemos las 6 de forma completa.

PREGUNTA 1: Matrices: una identidad cuadrática y la matriz inversa**ENUNCIADO**

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{y } I \text{ la matriz identidad de orden dos.}$$

a (0,5 puntos) Comprobad que $(A - 2I)^2 = 3I$.

b (1,25 puntos) Utilizando la igualdad del apartado anterior, encontrad la matriz inversa de la matriz A en función de las matrices A e I , y comprobad que coincide con la matriz B .

c (0,75 puntos) Calculad la matriz X que satisface la igualdad $A \cdot X = B$.

SOLUCIÓN

a) Calculamos primero $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elevamos al cuadrado:

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, queda comprobado que

$$(A - 2I)^2 = 3I.$$

b) Partimos de la igualdad anterior y la desarrollamos algebraicamente, tratando A e I como si fueran números (con cuidado, porque el producto de matrices no es conmutativo, aunque aquí A e I sí conmutan entre sí, ya que I es la identidad).

Idea clave

La idea central de este apartado es manipular la igualdad $(A - 2I)^2 = 3I$ hasta despejar una expresión de la forma $A \cdot (...) = I$: eso es precisamente lo que define a la matriz inversa de A .

Desarrollamos el cuadrado:

$$(A - 2I)^2 = A^2 - 2AI - 2IA + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I.$$

(Usamos que $AI = IA = A$ y que $I^2 = I$.) Igualando a $3I$:

$$A^2 - 4A + 4I = 3I \implies A^2 - 4A + I = 0.$$

Despejamos para aislar I sola:

$$I = 4A - A^2 = A(4I - A).$$

Esta última igualdad, $A \cdot (4I - A) = I$, dice exactamente que $4I - A$ es la matriz inversa de A (por definición, $A \cdot A^{-1} = I$):

$$A^{-1} = 4I - A.$$

Comprobamos que esto coincide con B :

$$4I - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

$$A^{-1} = B$$

Idea clave

Esta técnica —despejar la inversa a partir de una identidad polinómica que satisface la matriz— es mucho más rápida que calcular la inversa por el método general (adjunta y determinante) cuando dicha identidad ya se conoce o es fácil de comprobar.

c) Buscamos X tal que $A \cdot X = B$. Como A tiene inversa, multiplicamos ambos lados por A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B.$$

Como ya sabemos que $A^{-1} = B$, esto se reduce a calcular $B \cdot B = B^2$:

$$X = B \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1)(-3) & 2(-1) + (-1)(2) \\ (-3)(2) + 2(-3) & (-3)(-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3 & -2 - 2 \\ -6 - 6 & 3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

PREGUNTA 2: La hipérbola $f(x) = 1/x$: tangentes y área constante

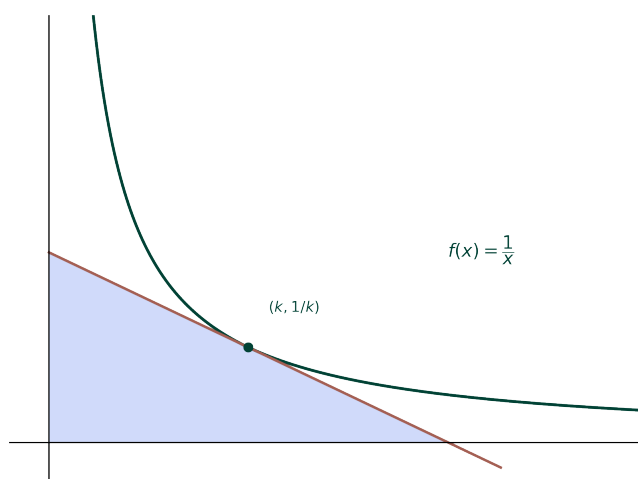
ENUNCIADO

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

a (0,75 puntos) Calculad la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 2$.

b (0,75 puntos) Calculad la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = k$, en que k es un número real positivo.

c (1 punto) Comprobad que, tal como se puede ver en la figura de abajo, la recta del apartado b determina un triángulo de área constante con los semiejes positivos de coordenadas. Calculad esta área.



SOLUCIÓN

a) Derivamos $f(x) = x^{-1}$:

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

En $x = 2$: $f(2) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

La recta tangente es

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \implies y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2).$$

Desarrollando:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} + 1.$$

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

b) Repetimos el mismo procedimiento, pero dejando $k > 0$ genérico:

$$f(k) = \frac{1}{k}, \quad f'(k) = -\frac{1}{k^2}.$$

$$y - \frac{1}{k} = -\frac{1}{k^2}(x - k) \implies y = \frac{1}{k} - \frac{x}{k^2} + \frac{1}{k} = -\frac{x}{k^2} + \frac{2}{k}.$$

$$y = -\frac{1}{k^2}x + \frac{2}{k}$$

Idea clave

Comprobación: sustituyendo $k = 2$ en esta fórmula general se recupera exactamente la recta del apartado a): $y = -\frac{1}{4}x + 1$. ☐

c) Buscamos los puntos de corte de esta recta con los ejes de coordenadas.

Idea clave

El corte con el eje Y se obtiene siempre haciendo $x = 0$; el corte con el eje X , haciendo $y = 0$. Con esos dos valores tenemos los catetos del triángulo rectángulo que forma la recta con los semiejes positivos.

Corte con el eje Y (hacemos $x = 0$):

$$y = -\frac{0}{k^2} + \frac{2}{k} = \frac{2}{k}.$$

Corte con el eje X (hacemos $y = 0$):

$$0 = -\frac{x}{k^2} + \frac{2}{k} \implies \frac{x}{k^2} = \frac{2}{k} \implies x = 2k.$$

Como $k > 0$, ambos cortes, $2k$ y $\frac{2}{k}$, son positivos: la recta sí corta a los dos semiejes positivos, formando un triángulo rectángulo con catetos $2k$ y $\frac{2}{k}$.

El área de ese triángulo es

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\text{cateto}_1) \cdot (\text{cateto}_2) = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{2}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4k}{k} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

$$S = 2u^2 \quad (\text{constante, no depende de } k)$$

Idea clave

El resultado es sorprendente e independiente de dónde se trace la tangente: el factor k se cancela exactamente entre los dos catetos ($2k$ y $2/k$), porque uno crece en la misma proporción en que el otro decrece. Esta es una propiedad clásica y muy conocida de la hipérbola $y = 1/x$.

PREGUNTA 3: Sistema de ecuaciones con parámetro m **ENUNCIADO**

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$$

en que m es un número real.

a (1,25 puntos) Discutid el sistema según los valores del parámetro m .

b (1,25 puntos) Resolved el sistema, si tiene solución, para el caso $m = 1$.

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante (por ejemplo, desarrollando por la primera fila):

$$\begin{aligned} \det(M) &= 2 \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -m \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & m \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-m^2 - 1) - 1(-m - 3) - 1(1 - 3m) \\ &= -2m^2 - 2 + m + 3 - 1 + 3m \\ &= -2m^2 + 4m. \end{aligned}$$

Factorizando:

$$\det(M) = -2m(m - 2).$$

Idea clave

El determinante se anula en $m = 0$ y en $m = 2$: son los dos únicos valores de m que hay que discutir aparte.

Caso $m \neq 0$ y $m \neq 2$: $\det(M) \neq 0$, así que $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3$. El sistema es **compatible determinado**.

Caso $m = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Se comprueba que $\text{rango}(M) = 2$ (la 3.ª fila es la suma de las dos primeras) y que esa misma relación se cumple en los términos independientes ($1 + 2 = 3$), así que $\text{rango}(M^*) = 2$ también. El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones, con un grado de libertad).

Caso $m = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Aquí $\text{rango}(M) = 2$, pero al añadir la columna de términos independientes el rango **sube** a $\text{rango}(M^*) = 3$ (no existe ninguna combinación lineal de las dos primeras filas de M^* que reproduzca la tercera). Como $\text{rango}(M) \neq \text{rango}(M^*)$, el sistema es **incompatible** (no tiene solución).

b) Para $m = 1$, estamos en el caso general ($m \neq 0, 2$), así que el sistema es compatible determinado. El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 3x + y - z = 3 \end{array} \right\}$$

Restamos la 1.ª ecuación de la 3.ª:

$$(3x + y - z) - (2x + y - z) = 3 - 1 \implies x = 2.$$

Sustituimos $x = 2$ en la 1.ª ecuación: $2(2) + y - z = 1 \implies y - z = -3$.

Sustituimos $x = 2$ en la 2.ª ecuación: $2 + y + z = 2 \implies y + z = 0 \implies z = -y$.

Sustituyendo $z = -y$ en $y - z = -3$: $y - (-y) = -3 \implies 2y = -3 \implies y = -\frac{3}{2}$.

Entonces $z = -y = \frac{3}{2}$.

$$(x, y, z) = \left(2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

Idea clave

Comprobación con la 3.ª ecuación: $3(2) + \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = 6 - 3 = 3 \checkmark$.

PREGUNTA 4: Continuidad (Bolzano) y área entre curvas

ENUNCIADO

Sea la función $f(x)$ definida por $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.

a (1,25 puntos) Justificad que $f(x) = 2$ tiene una solución en el intervalo $(-1, 0)$.

b (1,25 puntos) Sea la función $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculad el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $h(x)$.

SOLUCIÓN

a) Definimos la función auxiliar $g(x) = f(x) - 2 = -3x + e^{2x^3-1} - 2$. Buscar una solución de $f(x) = 2$ equivale a buscar un cero de $g(x)$.

Idea clave

Siempre que haya que “justificar que una ecuación tiene solución en un intervalo”, sin pedir hallarla explícitamente, la herramienta es el teorema de Bolzano: basta ver que la función (aquí, $g = f - 2$) es continua y cambia de signo en los extremos del intervalo.

La función $g(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser suma y composición de funciones continuas (un polinomio y una exponencial de un polinomio). En particular, es continua en $[-1, 0]$.

Evaluamos en los extremos:

$$g(-1) = -3(-1) + e^{2(-1)^3-1} - 2 = 3 + e^{-3} - 2 = 1 + e^{-3} \approx 1,0498 > 0.$$

$$g(0) = -3(0) + e^{2(0)^3-1} - 2 = e^{-1} - 2 \approx 0,3679 - 2 = -1,6321 < 0.$$

Como g es continua en $[-1, 0]$ y $g(-1) > 0 > g(0)$, por el teorema de Bolzano existe al menos un punto $c \in (-1, 0)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = 2$.

Por Bolzano, $f(x) = 2$ tiene al menos una solución en $(-1, 0)$.

b) Para hallar el área entre f y h , primero necesitamos sus puntos de corte.

Idea clave

Antes de lanzarse a integrar, conviene simplificar la diferencia $f(x) - h(x)$: al ser f y h funciones con el mismo término exponencial e^{2x^3-1} , ese término se cancela por completo al restar, dejando solo un polinomio sencillo, mucho más fácil de integrar.

Calculamos la diferencia:

$$f(x) - h(x) = (-3x + e^{2x^3-1}) - (-3x^2 + e^{2x^3-1}) = -3x + 3x^2 = 3x^2 - 3x = 3x(x - 1).$$

Los puntos de corte son las soluciones de $f(x) - h(x) = 0$:

$$3x(x - 1) = 0 \implies x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

Para saber cuál función queda por encima entre $x = 0$ y $x = 1$, evaluamos la diferencia en un punto intermedio, por ejemplo $x = \frac{1}{2}$:

$$3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} < 0.$$

Como $f - h < 0$ en ese tramo, es h quien queda por encima de f entre $x = 0$ y $x = 1$. El área es

$$S = \int_0^1 (h(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (3x - 3x^2) dx.$$

Integramos:

$$\int_0^1 (3x - 3x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x^3 \right]_0^1 = \left(\frac{3}{2} - 1 \right) - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$S = \frac{1}{2} u^2$$

PREGUNTA 5: Perpendicular común y distancia entre dos rectas

ENUNCIADO

Sean r_1 y r_2 las rectas definidas por $r_1 : x - 1 = y = -z$ y por $r_2 : x = y = z$, respectivamente.

a (1,75 puntos) Calculad la ecuación paramétrica de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r_1 y r_2 .

b (0,75 puntos) Calculad la distancia entre r_1 y r_2 .

SOLUCIÓN

Primero escribimos ambas rectas en forma paramétrica.

Para $r_1 : x - 1 = y = -z$, llamamos t al valor común: $x - 1 = t \Rightarrow x = 1 + t$; $y = t$; $-z = t \Rightarrow z = -t$.

$$r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $r_2 : x = y = z$, llamamos s al valor común:

$$r_2 : (x, y, z) = (0, 0, 0) + s(1, 1, 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) Un punto genérico de r_1 es $P_1 = (1 + t, t, -t)$, y uno de r_2 es $P_2 = (s, s, s)$.

Idea clave

La recta perpendicular común es la única recta que corta a la vez a r_1 y a r_2 formando ángulo recto con ambas. Para encontrarla, buscamos los puntos $P_1 \in r_1$ y $P_2 \in r_2$ tales que el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ sea perpendicular simultáneamente a los vectores directores de r_1 y de r_2 : eso da dos ecuaciones (una por cada perpendicularidad) con dos incógnitas, t y s .

El vector que une ambos puntos es

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (s - 1 - t, s - t, s + t).$$

Imponemos que sea perpendicular al vector director de r_1 , $\vec{d}_1 = (1, 1, -1)$:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{d}_1 = 0 \implies (s - 1 - t) + (s - t) - (s + t) = 0 \implies s - 1 - 3t = 0.$$

E imponemos que sea perpendicular al vector director de r_2 , $\vec{d}_2 = (1, 1, 1)$:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{d}_2 = 0 \implies (s - 1 - t) + (s - t) + (s + t) = 0 \implies 3s - 1 - t = 0.$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} s - 3t = 1 \\ 3s - t = 1 \end{cases}$$

De la 1.ª ecuación: $s = 1 + 3t$. Sustituyendo en la 2.ª: $3(1 + 3t) - t = 1 \Rightarrow 3 + 9t - t = 1 \Rightarrow 8t = -2 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$.

Entonces $s = 1 + 3\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Sustituyendo en los puntos genéricos:

$$P_1 = \left(1 - \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad P_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

El vector director de la perpendicular común es

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

que podemos simplificar (multiplicando por -2) a $(1, -1, 0)$.

Perpendicular común: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \lambda(1, -1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Como r_1 y r_2 se cruzan (no son paralelas ni se cortan: sus direcciones $(1, 1, -1)$ y $(1, 1, 1)$ no son proporcionales, y un punto de una no verifica en general las ecuaciones de la otra), la distancia entre ellas es exactamente la longitud del segmento de la perpendicular común entre los dos puntos de corte, P_1 y P_2 , que ya hemos calculado en el apartado a).

Idea clave

Para dos rectas que se cruzan en el espacio, la distancia mínima entre ellas se alcanza siempre a lo largo de la perpendicular común; por eso, una vez hallados P_1 y P_2 en el apartado anterior, la distancia es simplemente $|\overrightarrow{P_1P_2}|$, sin necesidad de ningún cálculo adicional.

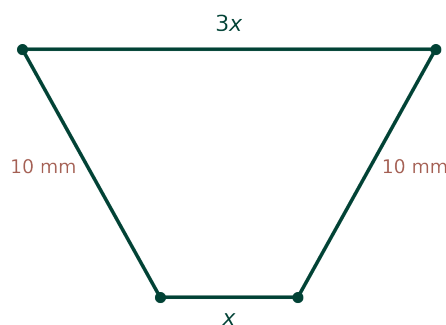
$$d(r_1, r_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \left| \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$$

PREGUNTA 6: Optimización: la sección trapezoidal de la pieza metálica

ENUNCIADO

Queremos construir una pieza metálica que tenga por sección un trapecio isósceles con la base superior tres veces más larga que la base inferior. Los otros lados del trapecio miden 10 mm, tal como podéis observar en la figura siguiente:



- a (0,5 puntos) Expresad la altura del trapecio en función de la longitud x de la base inferior.
- b (2 puntos) Calculad la longitud de la base inferior del trapecio de manera que el área de la pieza sea máxima y encontrad el valor de esta área máxima.

SOLUCIÓN

a) La base inferior mide x y la superior $3x$. Al ser un trapecio isósceles, si trazamos las dos alturas desde los extremos de la base inferior hasta la base superior, la diferencia de longitud entre las dos bases ($3x - x = 2x$) se reparte por igual a ambos lados, dejando un segmento horizontal de longitud $\frac{2x}{2} = x$ bajo cada lado inclinado.

Idea clave

Este es el paso geométrico clave de cualquier trapecio isósceles: al “dejar caer” las alturas, se forman dos triángulos rectángulos en los extremos, cuya base horizontal es la mitad de la diferencia entre las dos bases del trapecio.

Cada lado inclinado (de longitud 10 mm) es entonces la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos x (horizontal) y h (la altura buscada, vertical). Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + h^2 = 10^2 = 100 \implies h^2 = 100 - x^2 \implies h = \sqrt{100 - x^2}.$$

(Tomamos la raíz positiva porque h es una longitud.)

$$h(x) = \sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10.$$

b) El área de un trapecio es $\frac{(\text{base mayor} + \text{base menor})}{2} \cdot \text{altura}$. Con base mayor $3x$, base menor x y altura $h(x) = \sqrt{100 - x^2}$:

$$S(x) = \frac{3x + x}{2} \cdot \sqrt{100 - x^2} = \frac{4x}{2} \sqrt{100 - x^2} = 2x\sqrt{100 - x^2}, \quad 0 < x < 10.$$

Idea clave

Para derivar una raíz cuadrada multiplicada por x , conviene usar la regla del producto junto con la regla de la cadena en el factor $\sqrt{100 - x^2}$.

Derivamos usando la regla del producto, con $u = 2x$, $u' = 2$, $v = \sqrt{100 - x^2}$, $v' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$:

$$S'(x) = 2\sqrt{100 - x^2} + 2x \cdot \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} = 2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

Ponemos todo sobre el mismo denominador:

$$S'(x) = \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

Igualamos a cero (el denominador nunca se anula en el dominio $0 < x < 10$, así que basta con anular el numerador):

$$200 - 4x^2 = 0 \implies x^2 = 50 \implies x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad (x > 0).$$

Comprobamos que es un máximo estudiando el signo de $S'(x)$: para $x < 5\sqrt{2}$, $200 - 4x^2 > 0$, así que $S'(x) > 0$ (creciente); para $x > 5\sqrt{2}$, $S'(x) < 0$ (decreciente). Por tanto, $x = 5\sqrt{2}$ es efectivamente un **máximo**.

$$x = 5\sqrt{2} \text{ mm} \approx 7,07 \text{ mm}$$

Calculamos el área máxima. Primero, la altura en ese punto:

$$h(5\sqrt{2}) = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Idea clave

Es una coincidencia reveladora que, en el óptimo, $x = h = 5\sqrt{2}$: la base inferior y la altura coinciden exactamente. No es casualidad, sino una consecuencia de la simetría del problema (maximizar $2x\sqrt{100 - x^2}$ equivale a maximizar $x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, que por la desigualdad entre media aritmética y geométrica se optimiza cuando $x^2 = 100 - x^2$, es decir, cuando x y h son iguales).

Entonces:

$$S_{\text{máx}} = 2x \cdot h = 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 2 \cdot 25 \cdot 2 = 100.$$

$$S_{\text{máx}} = 100 \text{ mm}^2$$