

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Extraordinaria 2024

Matemáticas II

Sèrie 3

Baremo e instruccions

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, es necesario que lo indiquéis claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates: el examen original permite elegir 4 de las 6 cuestiones. Como recurso de estudio, aquí resolvemos las 6 de forma completa.

PREGUNTA 1: Estudio de una función polinómica**ENUNCIADO**

Considerad la función polinómica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

a (1,25 puntos) Justificad que su gráfica corta el eje de abscisas en un punto del intervalo $[-2, 0]$. Dad un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre este punto de corte.

b (1,25 puntos) Estudiad las zonas de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de $y = f(x)$. ¿Cuántos puntos de corte tiene exactamente la gráfica de esta función con el eje de abscisas? Justificad la respuesta.

SOLUCIÓN

a) La función $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$ es un polinomio, así que es continua en todo $\mathbb{R}$. Esto nos permite aplicar el teorema de Bolzano en cualquier intervalo.

Idea clave

Bolzano nos garantiza un cero si la función es continua y cambia de signo en los extremos del intervalo. La estrategia para acotar el intervalo de longitud 0,5 es ir evaluando puntos intermedios hasta encerrar el cambio de signo en un tramo suficientemente estrecho.

Evaluamos f en los extremos de $[-2, 0]$:

$$f(-2) = 3(-2)^{13} + 5(-2)^3 + 2 = 3(-8192) + 5(-8) + 2 = -24614 < 0,$$

$$f(0) = 3(0)^{13} + 5(0)^3 + 2 = 2 > 0.$$

Como f es continua en $[-2, 0]$ y $f(-2) < 0 < f(0)$, por el teorema de Bolzano existe al menos un punto $c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$.

Para acotar ese punto en un intervalo de longitud 0,5, evaluamos en puntos intermedios:

$$\begin{aligned}f(-1) &= 3(-1)^{13} + 5(-1)^3 + 2 = -3 - 5 + 2 = -6 < 0, \\f(-0,5) &= 3(-0,5)^{13} + 5(-0,5)^3 + 2 \approx -0,00037 - 0,625 + 2 = 1,3746... > 0.\end{aligned}$$

Como $f(-1) < 0$ y $f(-0,5) > 0$, hay un cambio de signo en $[-1, -0,5]$, que tiene longitud 0,5. Por tanto:

$$c \in [-1, -0,5].$$

b) Estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 39x^{12} + 15x^2.$$

Idea clave

Los dos sumandos de $f'(x)$ son potencias pares (grado 12 y grado 2) multiplicadas por coeficientes positivos, así que cada uno es ≥ 0 para todo x real. Esto permite decidir el signo de f' sin necesidad de resolver ninguna ecuación.

Como $x^{12} \geq 0$ y $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y los coeficientes 39 y 15 son positivos, se tiene

$$f'(x) = 39x^{12} + 15x^2 \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Además, $f'(x) = 0$ únicamente cuando $x = 0$ (es el único valor que anula ambos sumandos a la vez), y en ese punto f' no cambia de signo: es positiva antes y después de $x = 0$.

Por tanto, f es **estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$** . No hay ningún intervalo de decrecimiento, y $x = 0$ no es ni máximo ni mínimo relativo (es un punto de inflexión con tangente horizontal, ya que f' no cambia de signo ahí).

Como f es estrictamente creciente en todo su dominio, es inyectiva: no puede tomar el valor 0 más de una vez. Ya hemos visto en el apartado a) que sí lo toma al menos una vez. Por tanto, la gráfica de f corta al eje de abscisas en **exactamente un punto**.

PREGUNTA 2: Sistema de ecuaciones con parámetro

ENUNCIADO

Considerad el siguiente sistema de ecuaciones, donde m es un parámetro real:

$$\left. \begin{aligned}x - 3y + mz &= -2 \\x + my + 2z &= 3 \\x + y + 2z &= m\end{aligned} \right\}$$

a (1,25 puntos) Discutid el sistema según el valor del parámetro m .

b (0,5 puntos) Encontrad la solución del sistema para $m = 0$.

c (0,75 puntos) Para $m = 2$, dad una solución (x, y, z) del sistema que, además, cumpla $x = 5y$.

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & m & -2 \\ 1 & m & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & m \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante de A , desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (m \cdot 2 - 2 \cdot 1) - (-3) \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) + m \cdot (1 \cdot 1 - m \cdot 1) \\ &= (2m - 2) + 3(2 - 2) + m(1 - m) \\ &= 2m - 2 + 0 + m - m^2 \\ &= -m^2 + 3m - 2 \\ &= -(m - 1)(m - 2). \end{aligned}$$

Idea clave

El determinante se anula exactamente en los valores de m que podrían hacer que el sistema deje de ser compatible determinado. Son los únicos candidatos a discutir; para el resto de valores de m el sistema tiene siempre solución única.

Por tanto, $\det(A) = 0 \iff m = 1$ o $m = 2$.

Caso $m \neq 1$ y $m \neq 2$: $\det(A) \neq 0$, así que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$. El sistema es **compatible determinado** (solución única).

Caso $m = 1$: sustituyendo,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Se comprueba que $\text{rango}(A) = 2$ (las filas 2.ª y 3.ª de A son iguales, luego A tiene como mucho rango 2, y hay un menor de orden 2 no nulo). En cambio, las filas 2.ª y 3.ª de A^* difieren solo en el término independiente ($3 \neq 1$), así que $\text{rango}(A^*) = 3$. Como $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$, el sistema es **incompatible** (no tiene solución).

Caso $m = 2$: sustituyendo,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Aquí $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) < 3$ (n.º de incógnitas). El sistema es **compatible indeterminado**, con un grado de libertad (infinitas soluciones dependientes de un parámetro).

b) Para $m = 0$ el sistema es compatible determinado (caso general). Resolviendo:

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y = -2 \\ x = 3 \\ x + y + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

Idea clave

Con $m = 0$ la segunda ecuación se simplifica mucho ($x + 0 \cdot y + 2z = 3$), y conviene aprovechar esa simplicidad antes de recurrir a Cramer o a Gauss general.

De la 2.ª ecuación (con $m = 0$): $x + 2z = 3$. De la 1.ª ecuación: $x - 3y = -2$. De la 3.ª: $x + y + 2z = 0$.

Restando la 2.ª ecuación de la 3.ª: $(x + y + 2z) - (x + 2z) = 0 - 3 \Rightarrow y = -3$.

Sustituyendo $y = -3$ en la 1.ª ecuación: $x - 3(-3) = -2 \Rightarrow x + 9 = -2 \Rightarrow x = -11$.

Sustituyendo $x = -11$ en $x + 2z = 3$: $-11 + 2z = 3 \Rightarrow 2z = 14 \Rightarrow z = 7$.

$$(x, y, z) = (-11, -3, 7)$$

c) Para $m = 2$ ya sabemos (apartado a) que el sistema es compatible indeterminado. Resolvámoslo en función de un parámetro, por ejemplo $z = \lambda$.

El sistema con $m = 2$ es

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y + 2z = -2 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \end{array} \right\}$$

Restando la 3.ª ecuación de la 2.ª: $(x + 2y + 2z) - (x + y + 2z) = 3 - 2 \Rightarrow y = 1$.

Sustituyendo $y = 1$ en la 3.ª ecuación: $x + 1 + 2z = 2 \Rightarrow x = 1 - 2z$.

Tomando $z = \lambda$, la solución general es

$$(x, y, z) = (1 - 2\lambda, 1, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Idea clave

La condición extra $x = 5y$ no es una ecuación más del sistema original: es una condición adicional que sirve para fijar el valor concreto de λ dentro de esa familia de soluciones.

Imponemos ahora $x = 5y = 5 \cdot 1 = 5$:

$$1 - 2\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = -2.$$

Por tanto, la solución pedida es

$$(x, y, z) = (5, 1, -2).$$

Comprobación en las tres ecuaciones originales (con $m = 2$):

$$5 - 3(1) + 2(-2) = 5 - 3 - 4 = -2 \quad \boxtimes$$

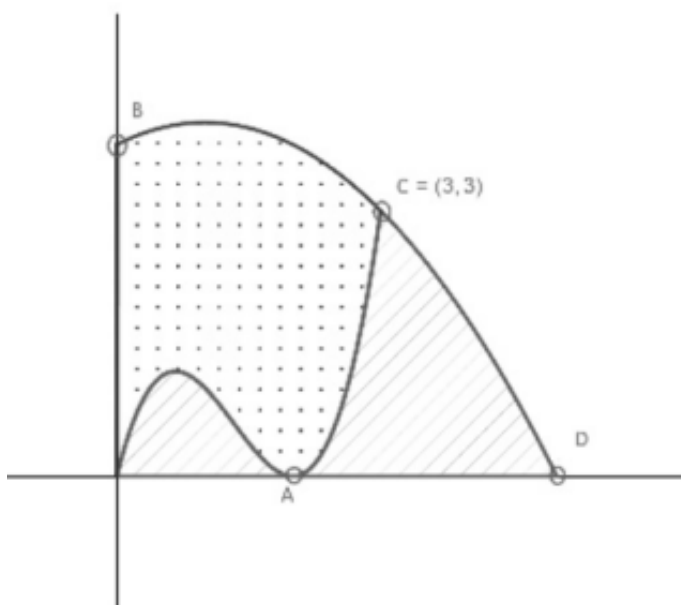
$$5 + 2(1) + 2(-2) = 5 + 2 - 4 = 3 \quad \boxtimes$$

$$5 + 1 + 2(-2) = 5 + 1 - 4 = 2 = m \quad \boxtimes$$

PREGUNTA 3: Áreas entre curvas: el logotipo

ENUNCIADO

La clase de Èlia ha diseñado el siguiente logotipo para pintarlo en la pared del instituto:



La curva que pasa por el punto A es $y = f(x)$, con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, y la que pasa por los puntos B, $C = (3, 3)$ y D es $y = g(x)$, con $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

a (0,75 puntos) Calculad las coordenadas de los puntos A, B y D.

b (1,25 puntos) Calculad el área de la zona punteada.

c (0,5 puntos) Los alumnos quieren pintar la parte punteada de color azul y la parte rayada de color rojo. Sabiendo que el área total del logotipo es $\frac{175}{12} \text{ m}^2$, ¿de qué color necesitarán más pintura?

SOLUCIÓN

a) Según el enunciado, A está sobre la curva f y sobre el eje de abscisas (mirando la figura, es el punto donde f vuelve a tocar el eje X tras el pequeño bucle inicial).

Factorizamos f :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2.$$

Las raíces de $f(x) = 0$ son $x = 0$ (simple) y $x = 2$ (doble). El punto A , distinto del origen, es

$$A = (2, 0).$$

B está sobre la curva g y sobre el eje de ordenadas (según la figura), es decir, $x = 0$:

$$g(0) = -\left(\frac{0-1}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{1}{4} + 4 = \frac{15}{4}.$$

$$B = \left(0, \frac{15}{4}\right).$$

D está sobre la curva g y sobre el eje de abscisas, es decir, $g(x) = 0$:

$$-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \pm 2 \Rightarrow x = 5 \text{ o } x = -3.$$

Como D está a la derecha, según la figura,

$$D = (5, 0).$$

Idea clave

Como comprobación, el dato $C = (3, 3)$ que da el enunciado debe cumplirse con esta misma g : $g(3) = -\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$. En efecto, coincide, lo que confirma que g está bien identificada.

b) Observando la figura, para $x \in [0, 2]$ la curva g queda por encima de f (en $x = 0$, $g(0) = \frac{15}{4}$ frente a $f(0) = 0$; en $x = 2$, $g(2) = \frac{15}{4}$ frente a $f(2) = 0$; y $f(x) \geq 0$ en todo el tramo). La zona punteada es precisamente la región entre ambas curvas en ese tramo:

$$S_{\text{punteada}} = \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx.$$

Idea clave

La clave de este apartado es leer bien la figura: la región punteada no está limitada por el eje X , sino por las dos curvas f y g entre $x = 0$ y $x = 2$ (que es justo donde ambas coinciden en altura, en B y en el segmento sobre A).

Calculamos la función diferencia:

$$g(x) - f(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x).$$

Desarrollando $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{4}$:

$$g(x) - f(x) = -\frac{x^2 - 2x + 1}{4} + 4 - x^3 + 4x^2 - 4x = -x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{15}{4}.$$

Integramos:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(-x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{15}{4}\right) dx &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{15}{12}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{15}{4}x\right]_0^2 \\ &= \left(-\frac{16}{4} + \frac{15}{12} \cdot 8 - \frac{7}{4} \cdot 4 + \frac{15}{4} \cdot 2\right) - 0 \\ &= -4 + 10 - 7 + \frac{15}{2} \\ &= -1 + \frac{15}{2} = \frac{13}{2}.\end{aligned}$$

$$S_{\text{punteada}} = \frac{13}{2} \text{ m}^2 = 6,5 \text{ m}^2.$$

c) La parte rayada del logotipo son las otras dos regiones: el pequeño bucle bajo f entre $x = 0$ y $x = 2$, y el lóbulo bajo g entre $x = 2$ y $x = 5$ (hasta el punto D).

Área del bucle bajo f :

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_0^2 = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{4}{3}.$$

Área del lóbulo bajo g (de $x = 2$ a $x = 5$, hasta D):

$$\int_2^5 g(x) dx = \int_2^5 \left(-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4\right) dx = \frac{27}{4}.$$

Idea clave

Como comprobación de todo el apartado: la suma de las tres áreas (punteada + bucle + lóbulo) debe coincidir con el área total del logotipo que da el enunciado, $\frac{175}{12} \text{ m}^2$. En efecto: $\frac{13}{2} + \frac{4}{3} + \frac{27}{4} = \frac{78}{12} + \frac{16}{12} + \frac{81}{12} = \frac{175}{12}$. Coincide exactamente, lo que confirma que las regiones están bien identificadas.

Área rayada total:

$$S_{\text{rayada}} = \frac{4}{3} + \frac{27}{4} = \frac{16}{12} + \frac{81}{12} = \frac{97}{12} \text{ m}^2 \approx 8,08 \text{ m}^2.$$

Comparando:

$$S_{\text{punteada}} = \frac{13}{2} = \frac{78}{12} \text{ m}^2 \quad \text{frente a} \quad S_{\text{rayada}} = \frac{97}{12} \text{ m}^2.$$

Como $\frac{97}{12} > \frac{78}{12}$, necesitarán **más pintura roja** (para la parte rayada) que azul.

PREGUNTA 4: Probabilidad condicionada: test diagnóstico

ENUNCIADO

Se estima que el 20 % de los habitantes de una región padece algún tipo de arritmia. Para diagnosticarla, existe la posibilidad de colocar al paciente un monitor Holter, que detecta la arritmia en un 95 % de los casos de personas que la padecen, pero que también da falsos positivos, por motivos eléctricos, en personas que no padecen arritmias en un 0,5 % de los casos.

a (0,75 puntos) Si elegimos 4 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas padezca arritmias?

b (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar obtenga un diagnóstico positivo de arritmia?

c (1 punto) Si una persona obtiene un diagnóstico negativo en la prueba del Holter, ¿cuál es la probabilidad de que realmente padezca arritmias?

SOLUCIÓN

Llamamos A al suceso “padecer arritmia” y $+/-$ al suceso “diagnóstico positivo/negativo”. Los datos del enunciado son:

$$\begin{aligned}P(A) &= 0,2, & P(\bar{A}) &= 0,8, \\P(+ | A) &= 0,95 \quad (\text{sensibilidad}), \\P(+ | \bar{A}) &= 0,005 \quad (\text{tasa de falsos positivos}).\end{aligned}$$

a) Se eligen 4 personas al azar de forma independiente. Cada una padece arritmia con probabilidad $P(A) = 0,2$.

Idea clave

Para sucesos de tipo “al menos uno”, casi siempre es más rápido calcular el complementario (“ninguno”) y restar a 1, en vez de sumar los casos de 1, 2, 3 y 4 personas afectadas.

$$P(\text{al menos 1 de 4 con arritmia}) = 1 - P(\text{ninguna de las 4 con arritmia}) = 1 - P(\bar{A})^4 = 1 - 0,8^4.$$

$$1 - 0,8^4 = 1 - 0,4096 = 0,5904.$$

$$P(\text{al menos una con arritmia}) = 0,5904 = \frac{369}{625}$$

b) Usamos el teorema de la probabilidad total, condicionando según si la persona padece o no arritmia:

$$P(+) = P(+ | A) \cdot P(A) + P(+ | \bar{A}) \cdot P(\bar{A}).$$

$$\begin{aligned}P(+) &= 0,95 \cdot 0,2 + 0,005 \cdot 0,8 \\&= 0,19 + 0,004 \\&= 0,194.\end{aligned}$$

$$P(+) = 0,194 = \frac{97}{500}$$

c) Nos piden $P(A | -)$, una probabilidad “a posteriori”: se aplica el teorema de Bayes.

Idea clave

La pregunta va en sentido contrario al de los datos del enunciado: nos dan $P(+ | A)$ y nos piden $P(A | -)$. Ese cambio de sentido es la señal de que hace falta Bayes, no una simple lectura directa del dato.

Primero necesitamos $P(- | A)$ y $P(-)$.

Como $P(+ | A) = 0,95$, el suceso complementario es

$$P(- | A) = 1 - P(+ | A) = 1 - 0,95 = 0,05.$$

Y, del apartado b), $P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0,194 = 0,806$.

Por el teorema de Bayes:

$$P(A | -) = \frac{P(- | A) \cdot P(A)}{P(-)}.$$

$$P(A | -) = \frac{0,05 \cdot 0,2}{0,806} = \frac{0,01}{0,806} \approx 0,0124.$$

$$P(A | -) = \frac{5}{403} \approx 0,0124 \text{ (1,24 \%)}$$

Idea clave

Este resultado tiene sentido clínico: aunque el test falle en un 5 % de los enfermos (falsos negativos), la mayoría de las personas no tienen arritmia de partida, así que casi todos los diagnósticos negativos son, en efecto, verdaderos negativos. Por eso la probabilidad de padecer arritmia dado un negativo es pequeña.

PREGUNTA 5: Optimización de un rectángulo y recta tangente

ENUNCIADO

Para cada punto (x, y) de la curva $y = e^{-2x}$, con $x > 0$ e $y > 0$, considerad el rectángulo con vértices en los puntos $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ y (x, y) .

a (1,5 puntos) Comprobad que, de entre todos estos rectángulos, el que tiene $x = \frac{1}{2}$ es el de área máxima. ¿Cuál es el valor de esta área?

b (1 punto) Calculad la ecuación de la recta tangente a la función $y = e^{-2x}$ en el punto de abscisa $x = 0$, y su punto de corte con el eje de abscisas.

SOLUCIÓN

a) El rectángulo tiene base x y altura $y = e^{-2x}$, así que su área en función de x es

$$S(x) = x \cdot e^{-2x}, \quad x > 0.$$

Idea clave

Para optimizar, derivamos $S(x)$ (como producto de x por e^{-2x} , con la regla del producto) y buscamos dónde se anula la derivada; después hay que comprobar que ese punto crítico es efectivamente un máximo, no un mínimo ni un punto de inflexión.

Derivamos usando la regla del producto, con $u = x$, $u' = 1$, $v = e^{-2x}$, $v' = -2e^{-2x}$:

$$\begin{aligned} S'(x) &= u'v + uv' = e^{-2x} + x \cdot (-2e^{-2x}) \\ &= e^{-2x}(1 - 2x). \end{aligned}$$

Como $e^{-2x} > 0$ siempre, el signo de $S'(x)$ coincide con el signo de $(1 - 2x)$. Por tanto:

$$S'(x) = 0 \iff 1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Estudiamos el signo de $S'(x)$ alrededor de $x = \frac{1}{2}$:

- Si $0 < x < \frac{1}{2}$: $1 - 2x > 0$, luego $S'(x) > 0$ (creciente).
- Si $x > \frac{1}{2}$: $1 - 2x < 0$, luego $S'(x) < 0$ (decreciente).

Como S pasa de creciente a decreciente en $x = \frac{1}{2}$, se trata de un **máximo**. Queda comprobado que el rectángulo de área máxima es el que tiene $x = \frac{1}{2}$.

El valor de esa área máxima es

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

$$S_{\text{máx}} = \frac{1}{2e} \approx 0,1839 \text{ u}^2$$

b) Necesitamos la recta tangente a $y = e^{-2x}$ en $x = 0$. Su ecuación es

$$y - y(0) = y'(0) \cdot (x - 0).$$

Calculamos $y(0)$ y $y'(0)$. Por un lado, $y(0) = e^0 = 1$. Por otro, $y'(x) = -2e^{-2x}$, así que $y'(0) = -2e^0 = -2$.

Idea clave

La recta tangente en $x = 0$ usa la misma derivada $y'(x) = -2e^{-2x}$ que ya calculamos (salvo signo) al resolver el apartado a); no hace falta derivar de nuevo desde cero.

Sustituyendo en la ecuación de la recta:

$$y - 1 = -2(x - 0) \implies \boxed{y = 1 - 2x.}$$

El punto de corte con el eje de abscisas se obtiene haciendo $y = 0$:

$$0 = 1 - 2x \implies x = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\text{Punto de corte: } \left(\frac{1}{2}, 0\right)}$$

PREGUNTA 6: Geometría del espacio: plano y recta perpendicular

ENUNCIADO

Considerad el punto $P = (1, 3, 0)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 2z = -7$.

a (1 punto) Sea r la recta que es perpendicular a π y pasa por P . Calculad el punto de intersección de π con r .

b (0,5 puntos) Calculad la distancia d del punto P al plano π .

c (1 punto) Calculad la ecuación de otro plano π' que sea paralelo a π y que también esté a distancia d de P .

SOLUCIÓN

a) El vector normal de π es $\vec{n} = (1, 2, -2)$, que coincide con el vector director de cualquier recta perpendicular a π .

Idea clave

Una recta perpendicular a un plano tiene como vector director precisamente el vector normal del plano: por eso r se construye directamente a partir de los coeficientes de π , sin ningún cálculo adicional.

La recta r que pasa por $P = (1, 3, 0)$ con dirección $\vec{n} = (1, 2, -2)$ se parametriza como

$$r : (x, y, z) = (1, 3, 0) + t(1, 2, -2) = (1 + t, 3 + 2t, -2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sustituimos en la ecuación de π para hallar el valor de t del punto de corte:

$$(1 + t) + 2(3 + 2t) - 2(-2t) = -7$$

$$1 + t + 6 + 4t + 4t = -7$$

$$7 + 9t = -7$$

$$9t = -14$$

$$t = -\frac{14}{9}.$$

Sustituyendo $t = -\frac{14}{9}$ en la parametrización de r :

$$\begin{aligned}x &= 1 - \frac{14}{9} = -\frac{5}{9}, \\y &= 3 + 2\left(-\frac{14}{9}\right) = 3 - \frac{28}{9} = -\frac{1}{9}, \\z &= -2\left(-\frac{14}{9}\right) = \frac{28}{9}.\end{aligned}$$

$$\pi \cap r = \left(-\frac{5}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{28}{9}\right)$$

b) Usamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano. Para $\pi : x + 2y - 2z + 7 = 0$ y $P = (1, 3, 0)$:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}.$$

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 6 - 0 + 7|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{14}{\sqrt{9}} = \frac{14}{3}.$$

$$d = \frac{14}{3} \text{ u}$$

c) Un plano π' paralelo a π tiene la misma parte lineal (los mismos coeficientes de x, y, z), y solo cambia el término independiente:

$$\pi' : x + 2y - 2z = k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Idea clave

Pedir que π' esté a la misma distancia d de P que π , siendo ambos paralelos, da en general *dos* soluciones: el propio plano π (que obviamente está a distancia d de P) y otro plano distinto, situado “al otro lado” de P . El enunciado pide el otro plano, distinto de π .

Imponemos que la distancia de $P = (1, 3, 0)$ a π' sea también $d = \frac{14}{3}$:

$$\frac{|1 + 2(3) - 2(0) - k|}{3} = \frac{14}{3} \implies |7 - k| = 14.$$

Esta ecuación con valor absoluto tiene dos soluciones:

$$7 - k = 14 \implies k = -7, \quad 7 - k = -14 \implies k = 21.$$

La solución $k = -7$ corresponde precisamente al plano original π (recordemos que $\pi : x + 2y - 2z = -7$).

La otra solución, $k = 21$, es el plano pedido:

$$\pi' : x + 2y - 2z = 21$$