

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Ordinaria 2026

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

Tiempo: 90 minutos.

RESPONDA A LAS TRES PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA POR PREGUNTA: 2 PUNTOS)**PREGUNTA 1: Álgebra (2 puntos)****ENUNCIADO**

Dada la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ .

b (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Como A es una matriz cuadrada de orden 3, calculamos su determinante desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (\lambda - 2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (1) - (\lambda - 2) \cdot (0 - (\lambda - 1)) + \lambda \cdot (-1) \\ &= 1 + (\lambda - 2)(\lambda - 1) - \lambda \\ &= 1 + \lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Idea clave

Como en toda discusión de un sistema o de un rango asociado a una matriz cuadrada, lo primero es factorizar el determinante: los únicos valores de λ que pueden hacer variar el rango son los que anulan $|A|$.

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$: $|A| \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 3$ (rango máximo).

Si $\lambda = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomamos el menor formado por las dos primeras filas y columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

luego $\text{rg}(A) \geq 2$. Como $|A| = 0$, no puede ser 3. Por tanto, $\text{rg}(A) = 2$.

Si $\lambda = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El mismo menor de orden 2 de las dos primeras filas y columnas vale $1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1 \neq 0$, luego, igual que antes, $\text{rg}(A) = 2$.

Conclusión:

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{si } \lambda \neq 1, 3 \\ 2 & \text{si } \lambda = 1 \text{ o } \lambda = 3. \end{cases}$$

Apartado b)

Para $\lambda = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\lambda = 2 \neq 1, 3$, por el apartado anterior $|A| \neq 0$ y A es invertible. Esto es imprescindible para poder despejar X .

Idea clave

La ecuación es $A^2 - AX = I$. Como A es invertible, multiplicamos toda la ecuación por A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1}A^2 - A^{-1}AX = A^{-1}I \implies A - X = A^{-1} \implies X = A - A^{-1}.$$

Así evitamos calcular A^2 y volver a despejar: basta con hallar A^{-1} .

Calculamos A^{-1} mediante la matriz adjunta. Primero, $|A| = -1$ (puede comprobarse por Sarrus o reutilizando la factorización del apartado a) para $\lambda = 2$: $(2-1)(2-3) = -1$).

Calculamos la matriz de cofactores $C = (c_{ij})$, con $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & c_{12} &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & c_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, & c_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ c_{31} &= + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, & c_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

La matriz de cofactores es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y la matriz adjunta es su traspuesta:

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

PREGUNTA 2: Análisis: optimización (2 puntos)

ENUNCIADO

Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m² pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

SOLUCIÓN

Colocamos el vértice del ángulo recto en el origen, con los catetos sobre los ejes: el cateto de 42 m sobre el eje X y el de 56 m sobre el eje Y. Llamamos x e y a las dimensiones del rectángulo techado (con x paralelo al cateto de 42 y y paralelo al de 56).

Jardín triangular y parte techada óptima

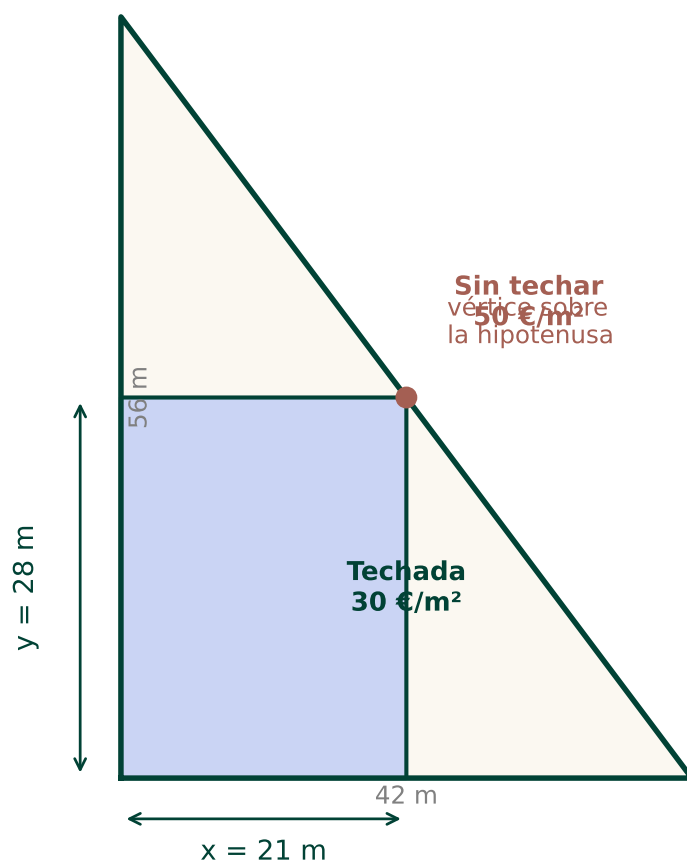


Figura 1: Jardín triangular y parte techada que minimiza el coste.

Como el vértice opuesto del rectángulo está sobre la hipotenusa, el punto (x, y) pertenece a la recta que une $(42, 0)$ con $(0, 56)$, cuya ecuación en forma segmentaria es

$$\frac{x}{42} + \frac{y}{56} = 1 \implies y = 56 \left(1 - \frac{x}{42}\right) = 56 - \frac{4}{3}x, \quad 0 < x < 42.$$

Idea clave

La condición “el vértice opuesto está sobre la hipotenusa” es la que liga x e y : sin esta relación tendríamos dos variables libres. Escribir la hipotenusa en forma segmentaria $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ es la manera más rápida de obtener esta ligadura.

El área total del triángulo es $\frac{42 \cdot 56}{2} = 1176 \text{ m}^2$. La parte techada tiene área xy y la parte no techada, el resto: $1176 - xy$. La función de coste es

$$C(x) = 30xy + 50(1176 - xy) = 58800 - 20xy.$$

Sustituyendo $y = 56 - \frac{4}{3}x$:

$$C(x) = 58800 - 20x \left(56 - \frac{4}{3}x \right) = \frac{80}{3}x^2 - 1120x + 58800.$$

Idea clave

Aunque el problema pide minimizar el coste, al desarrollar $C(x)$ queda una parábola con coeficiente principal positivo ($\frac{80}{3} > 0$): es coherente, porque cuanto mayor es la parte techada (xy grande) menor es el coste, y xy tiene un máximo (no puede crecer indefinidamente porque x está acotada por la hipotenusa).

Derivamos e igualamos a cero:

$$C'(x) = \frac{160}{3}x - 1120 = 0 \implies x = \frac{1120 \cdot 3}{160} = 21.$$

Como $C''(x) = \frac{160}{3} > 0$ para todo x , se trata de un mínimo (la parábola es cóncava hacia arriba). Además $x = 21 \in (0, 42)$, dentro del dominio válido.

Con $x = 21$:

$$y = 56 - \frac{4}{3}(21) = 56 - 28 = 28.$$

Las dimensiones de la parte techada que minimizan el coste son $21 \text{ m} \times 28 \text{ m}$, con un coste mínimo de $C(21) = 58\,800 - 20(21 \cdot 28) = 58\,800 - 11\,760 = 47\,040 \text{ €}$.

PREGUNTA 3: Geometría (2 puntos)

ENUNCIADO

Dados el plano $\pi : 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4},$$

se pide:

a) (1 punto) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .

b) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta r .

b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

SOLUCIÓN

Apartado a)

El vector normal de π es $\vec{n}_\pi = (2, 2, -1)$. La recta perpendicular a π que pasa por $P(2, 0, 0)$ tiene a $\vec{n}_\pi$ como vector director:

$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + t(2, 2, -1) = (2 + 2t, 2t, -t).$$

Sustituimos en la ecuación de π para hallar el punto de corte (el pie de la perpendicular):

$$2(2 + 2t) + 2(2t) - (-t) = 13 \implies 4 + 4t + 4t + t = 13 \implies 9t = 9 \implies t = 1.$$

El pie de la perpendicular es $M = (4, 2, -1)$.

Idea clave

El punto simétrico P' verifica que M es el punto medio de P y P' . Por eso $P' = 2M - P$, sin necesidad de plantear más ecuaciones.

$$P' = 2M - P = 2(4, 2, -1) - (2, 0, 0) = (8, 4, -2) - (2, 0, 0) = (6, 4, -2).$$

El punto simétrico es $P'(6, 4, -2)$.

Apartado b1)

La recta r tiene vector director $\vec{d}_r = (1, 1, 4)$ (los denominadores de las fracciones) y pasa por el punto $Q(2, 0, 0)$.

Comprobamos primero si r y π son paralelos, es decir, si $\vec{d}_r \perp \vec{n}_\pi$:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1, 1, 4) \cdot (2, 2, -1) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Como el producto escalar es 0, r es paralela a π (o está contenida en él).

Idea clave

Solo cuando la recta y el plano son paralelos tiene sentido hablar de “la distancia” entre ambos como un único número: si no lo fueran, se cortarían y la distancia sería 0.

Comprobamos que Q no pertenece a π : $2(2) + 2(0) - 0 = 4 \neq 13$, luego r no está contenida en π y son estrictamente paralelos.

Como son paralelos, la distancia de r a π coincide con la distancia de cualquier punto de r (por ejemplo Q) al plano:

$$d(r, \pi) = d(Q, \pi) = \frac{|2(2) + 2(0) - 0 - 13|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 - 13|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

La distancia entre π y r es 3.

Apartado b2)

Buscamos un plano σ que contenga a r y sea ortogonal a π . Su vector normal $\vec{n}_\sigma$ debe cumplir dos condiciones:

- Debe ser perpendicular a $\vec{d}_r = (1, 1, 4)$, ya que r está contenida en σ .
- Debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi = (2, 2, -1)$, ya que $\sigma \perp \pi$ equivale a que sus vectores normales sean perpendiculares.

Idea clave

Un vector perpendicular simultáneamente a otros dos se obtiene con el producto vectorial. Por eso $\vec{n}_\sigma = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi$.

$$\vec{n}_\sigma = \vec{d}_r \times \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2, 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) = (-9, 9, 0).$$

Simplificamos dividiendo por -9 : $\vec{n}_\sigma = (1, -1, 0)$.

El plano σ pasa por el punto de r , $Q(2, 0, 0)$, y tiene a $(1, -1, 0)$ como vector normal:

$$1(x - 2) - 1(y - 0) + 0(z - 0) = 0 \implies x - y - 2 = 0.$$

El plano buscado es $\sigma : x - y - 2 = 0$.

RESPONDA A UNA DE LAS DOS PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2 puntos)

Pregunta 4.1.

ENUNCIADO

El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

a (1 punto) Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.

b (1 punto) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

SOLUCIÓN

Apartado a)

Sea X la duración de una batería, $X \sim N(24, 3)$. Tipificamos:

$$Z = \frac{X - 24}{3}.$$

Buscamos $P(X < 21)$:

$$P(X < 21) = P\left(Z < \frac{21 - 24}{3}\right) = P(Z < -1).$$

Idea clave

La tabla de la Normal solo da probabilidades para $z \geq 0$. Usamos la simetría de la campana: $P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1)$.

Buscando en la tabla, $P(Z < 1) = 0.8413$. Por tanto:

$$P(X < 21) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

La probabilidad de que una batería sea defectuosa es 0.1587.

Apartado b)

Sea Y = número de teléfonos (de los 10) con batería no defectuosa. Por el apartado anterior, la probabilidad de que una batería *no* sea defectuosa es

$$p = 1 - 0.1587 = 0.8413.$$

Como los 10 teléfonos son independientes y cada uno tiene la misma probabilidad p de tener batería no defectuosa, $Y \sim B(10, 0.8413)$.

Buscamos $P(Y \geq 9) = P(Y = 9) + P(Y = 10)$:

$$P(Y = 9) = \binom{10}{9} (0.8413)^9 (0.1587)^1 \approx 0.3351,$$

$$P(Y = 10) = \binom{10}{10} (0.8413)^{10} \approx 0.1777.$$

$$P(Y \geq 9) = 0.3351 + 0.1777 = 0.5129.$$

La probabilidad de que al menos 9 de los 10 teléfonos tengan la batería no defectuosa es, aproximadamente, 0.5129.

Pregunta 4.2.**ENUNCIADO**

Sabiendo que $P(B) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.4$ y $P(B|A) = 0.2$, calcule las siguientes probabilidades:

a (1 punto) $P(A)$ y $P(A \cap B)$.

b (1 punto) $P((A \cap B) | (A \cup B))$.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Por la definición de probabilidad condicionada,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.2 \implies P(A \cap B) = 0.2 P(A). \quad (1)$$

Por la fórmula de la probabilidad de la unión,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0.4 = P(A) + 0.4 - P(A \cap B),$$

de donde

$$P(A) = P(A \cap B). \quad (2)$$

Idea clave

La igualdad (2) tiene una lectura directa: como $P(A \cup B) = P(B)$, el suceso A no añade nada de probabilidad fuera de B ; es decir, A está (salvo sucesos de probabilidad nula) contenido en B . Por eso $P(A) = P(A \cap B)$.

Sustituyendo (2) en (1):

$$P(A) = 0.2 P(A) \implies 0.8 P(A) = 0 \implies P(A) = 0.$$

Y por tanto, de (2), $P(A \cap B) = 0$ también.

Idea clave

El resultado $P(A) = 0$ no es un error: es la única forma de que las tres condiciones del enunciado sean compatibles entre sí. Si A estuviera contenido en B con $P(A) > 0$, se tendría $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$, lo que contradice el dato $P(B|A) = 0.2$. La única salida es que $P(A) = 0$.

Por tanto, $P(A) = 0$ y $P(A \cap B) = 0$.

Apartado b)

Como $A \cap B \subseteq A \cup B$, se tiene $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$. Por la definición de probabilidad condicionada:

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}.$$

Sustituyendo los valores del apartado anterior:

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{0}{0.4} = 0.$$

El resultado es 0.

RESPONDA A UNA DE LAS DOS PREGUNTAS SIGUIENTES (CALIFICACIÓN MÁXIMA: 2 puntos)

Pregunta 5.1. (2 puntos) Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

SOLUCIÓN

La función $f(x) = \ln(x)$ se anula en $x = 1$ ($\ln 1 = 0$) y es positiva para $x > 1$. La región acotada por la gráfica de f , el eje X y la recta $x = e$ es, por tanto, la comprendida entre $x = 1$ (donde la curva corta al eje) y $x = e$.

Idea clave

No integramos desde $x = 0$: cuando $x \rightarrow 0^+$, $\ln(x) \rightarrow -\infty$, así que esa zona no delimita una región acotada. El propio corte de f con el eje X en $x = 1$ marca el inicio natural del área pedida.

Como $f(x) \geq 0$ en $[1, e]$, el área es directamente la integral:

$$A = \int_1^e \ln(x) dx.$$

Integramos por partes, con $u = \ln x$, $dv = dx$, de donde $du = \frac{1}{x}dx$, $v = x$:

$$\int \ln(x) dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$A = \left[x \ln x - x \right]_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 0 + 1 = 1.$$

El área de la región es 1 (unidad de área).

Pregunta 5.2.

ENUNCIADO

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \operatorname{sen}(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

a (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

b (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Continuidad en $x = 0$. Ambos trozos son funciones continuas en su dominio (polinómica más seno, y cociente de funciones continuas con denominador $1 + x^2 \neq 0$), así que solo falta igualar los valores laterales en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3(0)^2 - \operatorname{sen}(0) + b = b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{2e^0}{1+0^2} = 2.$$

Para que f sea continua en $x = 0$: $b = 2$.

Derivabilidad en $x = 0$. Derivamos cada trozo:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - a \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x(1+x^2) - 2e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Evaluamos los límites laterales de la derivada en 0:

$$f'(0^-) = 6(0) - a \cos(0) = -a, \quad f'(0^+) = \frac{2e^0(1+0) - 2e^0(0)}{(1+0)^2} = 2.$$

Idea clave

Para que f sea derivable en $x = 0$ hace falta, además de la continuidad, que las derivadas laterales coincidan. No basta con derivar y sustituir directamente si antes no se ha garantizado la continuidad.

Igualando: $-a = 2 \Rightarrow a = -2$.

Los valores buscados son $a = -2$ y $b = 2$.

Apartado b)

El punto $x = 2$ pertenece a la rama $x \geq 0$, donde $f(x) = \frac{2e^x}{1+x^2}$.

Calculamos el valor de la función y de su derivada en $x = 2$. Usando la derivada obtenida en el apartado anterior:

$$f(2) = \frac{2e^2}{1+2^2} = \frac{2e^2}{5}.$$
$$f'(2) = \frac{2e^2(1+2^2) - 2e^2 \cdot 2 \cdot 2}{(1+2^2)^2} = \frac{2e^2 \cdot 5 - 8e^2}{25} = \frac{10e^2 - 8e^2}{25} = \frac{2e^2}{25}.$$

La recta tangente en $x = 2$ es

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2e^2}{5} + \frac{2e^2}{25}(x - 2).$$

Simplificando:

$$y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{10e^2 - 4e^2}{25} = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}.$$

La recta tangente es $y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}$.