

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Andalucía -- Extraordinaria 2022

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad y Pruebas de Admisión – Andalucía, Ceuta, Melilla y Centros en Marruecos. Convocatoria Extraordinaria. Curso 2021–2022.

Instrucciones:

- a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
- b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.
- c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\ln x)^3 + 2x} = 1$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

SOLUCIÓN

Sustituyendo $x \rightarrow +\infty$: el numerador $ax \rightarrow +\infty$ y el denominador $(\ln x)^3 + 2x \rightarrow +\infty$: indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicamos L'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado:

$$(ax)' = a, \quad [(\ln x)^3 + 2x]' = 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} + 2 = \frac{3(\ln x)^2}{x} + 2.$$

Idea clave

No hace falta seguir derivando: basta con calcular el límite del nuevo cociente. Como el logaritmo

crece mucho más lentamente que cualquier potencia de x , se cumple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (aplicando L'Hôpital dos veces más, si se quiere justificar con detalle). Por tanto, el denominador de la derivada tiende a un valor finito y no nulo, y podemos calcular el límite directamente sin más aplicaciones de la regla.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a}{3(\ln x)^2} + 2}{x} = \frac{a}{0+2} = \frac{a}{2}.$$

Igualamos al valor dado:

$$\frac{a}{2} = 1 \implies a = 2.$$

El valor pedido es $a = 2$.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

SOLUCIÓN

Idea clave

Como f es una parábola invertida y par (simétrica respecto al eje Y), el rectángulo de área máxima con base en el eje X también será simétrico: sus vértices inferiores están en $(\pm x, 0)$ y los superiores en $(\pm x, f(x))$, para cierto $x > 0$.

La anchura del rectángulo es $2x$ y su altura es $f(x) = -x^2 + 12$. El área en función de x es:

$$A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x, \quad 0 < x < 2\sqrt{3}$$

(el límite $2\sqrt{3}$ corresponde a la raíz positiva de $f(x) = 0$, es decir, $x^2 = 12$).

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = 2 \ (x > 0).$$

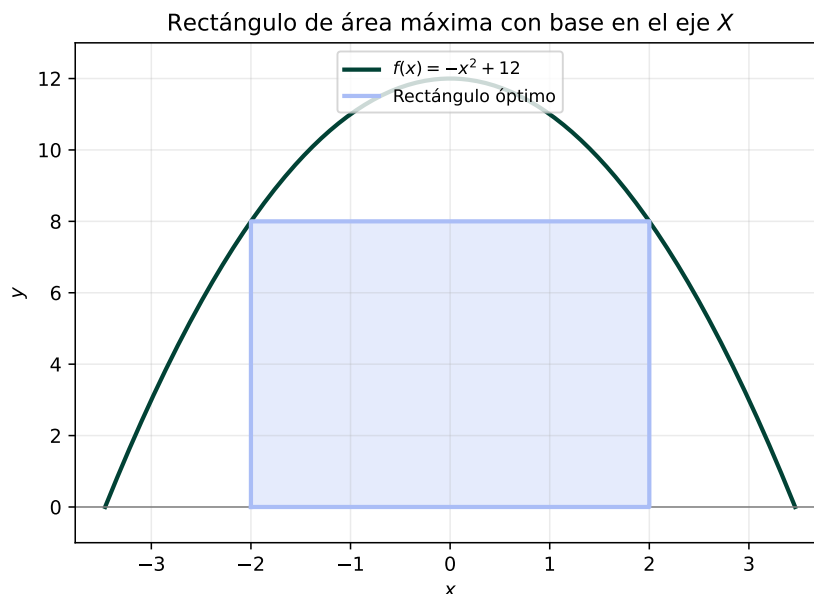
Comprobamos que es un máximo:

$$A''(x) = -12x, \quad A''(2) = -24 < 0.$$

Calculamos la altura y el área:

$$f(2) = -4 + 12 = 8, \quad A(2) = -2(8) + 24(2) = -16 + 48 = 32.$$

Los vértices del rectángulo son $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 8)$ y $(-2, 8)$, y su área máxima es 32 u^2 .



EJERCICIO 3 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Calcula $\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+x} - 1$.)

SOLUCIÓN

Hacemos el cambio sugerido: $t = \sqrt{1+x} - 1 \Rightarrow t+1 = \sqrt{1+x} \Rightarrow (t+1)^2 = 1+x \Rightarrow x = (t+1)^2 - 1$.

Derivamos para obtener dx :

$$dx = 2(t+1) dt.$$

Cambiamos los límites de integración:

$$x = 3 \Rightarrow t = \sqrt{4} - 1 = 1, \quad x = 8 \Rightarrow t = \sqrt{9} - 1 = 2.$$

Sustituimos en la integral:

$$\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot 2(t+1) dt = \int_1^2 \frac{2(t+1)}{t} dt.$$

Idea clave

Antes de integrar, separamos la fracción para obtener una suma de un término constante y uno racional simple: $\frac{2(t+1)}{t} = \frac{2t+2}{t} = 2 + \frac{2}{t}$.

$$\int_1^2 \left(2 + \frac{2}{t}\right) dt = \left[2t + 2 \ln |t|\right]_1^2 = (4 + 2 \ln 2) - (2 + 2 \ln 1) = 4 + 2 \ln 2 - 2 = 2 + 2 \ln 2.$$

El valor de la integral es $2 + 2 \ln 2 \approx 3,386$.

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)**ENUNCIADO**

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

- a) [1,25 puntos] Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza sus gráficas.
- b) [1,25 puntos] Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Igualemos $f(x) = g(x)$:

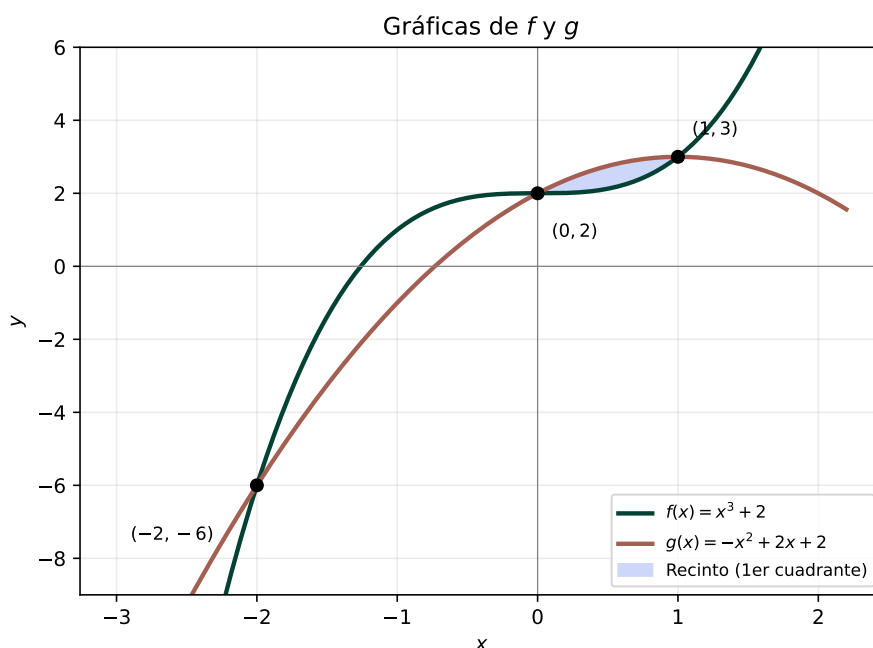
$$x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2 \implies x^3 + x^2 - 2x = 0 \implies x(x^2 + x - 2) = 0.$$

Factorizamos el paréntesis: $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Por tanto:

$$x(x + 2)(x - 1) = 0 \implies x = 0, x = -2, x = 1.$$

Calculamos las ordenadas: $f(0) = 2$; $f(-2) = -8 + 2 = -6$; $f(1) = 1 + 2 = 3$.

Los puntos de corte son $(-2, -6)$, $(0, 2)$ y $(1, 3)$.

**Apartado b)****Idea clave**

De los tres puntos de corte, solo $(0, 2)$ y $(1, 3)$ están en el primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$); el tramo entre ellos, $x \in [0, 1]$, es el recinto pedido. Comprobamos además que ambas funciones son no negativas en todo ese tramo (para no salir del primer cuadrante): $f(x) = x^3 + 2 \geq 2 > 0$ siempre

para $x \geq 0$; $g(x) = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3$ tiene su máximo en $x = 1$ (valor 3) y en $x = 0$ vale 2, por lo que $g(x) \geq 2 > 0$ en $[0, 1]$.

Determinamos qué función queda por encima en $(0, 1)$. Factorizamos:

$$f(x) - g(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2).$$

Para $0 < x < 1$: $x > 0$, $(x-1) < 0$, $(x+2) > 0$, así que el producto es negativo: $f(x) - g(x) < 0$, es decir, $g(x) > f(x)$ en ese tramo.

Calculamos el área:

$$\text{Área} = \int_0^1 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) \, dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1.$$

Evaluamos:

$$\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right) - 0 = -\frac{3}{12} - \frac{4}{12} + \frac{12}{12} = \frac{5}{12}.$$

El área del recinto en el primer cuadrante es $\frac{5}{12} u^2$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) [0,5 puntos] Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.
- b) [2 puntos] Para $a = 1$ calcula X tal que $AXB = C$, si es posible.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Calculamos $|B|$ desarrollando por la primera fila:

$$|B| = 1 \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada menor:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2a.$$

Sustituyendo:

$$|B| = -2 - (-2) + a(4 - 2a) = -2 + 2 + 4a - 2a^2 = 4a - 2a^2.$$

Factorizamos:

$$|B| = -2a(a - 2).$$

Igualamos a cero: $a = 0$ o $a = 2$.

B no tiene inversa para $a = 0$ y para $a = 2$.

Apartado b)

Idea clave

A es 2×2 , B es 3×3 , y C es 2×3 . Para que $AXB = C$ tenga sentido dimensionalmente, X debe ser 2×3 . Como $a = 1$ no anula $|B|$ (según el apartado anterior, solo se anula en $a = 0, 2$), tanto A como B son invertibles, y podemos despejar $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Para $a = 1$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos A^{-1} (matriz 2×2 , inversa directa):

$$|A| = 1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $|B|$ con $a = 1$: $|B| = -2(1)(1 - 2) = -2(1)(-1) = 2$.

Calculamos B^{-1} mediante la matriz adjunta. Los 9 cofactores de B :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \\ C_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

La matriz de cofactores y su traspuesta (adjunta):

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{adj}(B) = C^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $X = A^{-1}CB^{-1}$ en dos pasos. Primero $A^{-1}C$:

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2(1) + 1(2) & 2(0) + 1(-1) & 2(-2) + 1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ahora multiplicamos por B^{-1} :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos cada entrada de X :

$$X_{11} = 1(-1) + 0(1) + (-2)(1) = -1 + 0 - 2 = -3, \quad X_{12} = 1(1) + 0(-1) + (-2)(0) = 1,$$

$$X_{13} = 1(0) + 0(1/2) + (-2)(-1/2) = 0 + 0 + 1 = 1,$$

$$X_{21} = 4(-1) + (-1)(1) + (-5)(1) = -4 - 1 - 5 = -10, \quad X_{22} = 4(1) + (-1)(-1) + (-5)(0) = 4 + 1 + 0 = 5,$$

$$X_{23} = 4(0) + (-1)(1/2) + (-5)(-1/2) = 0 - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2.$$

La matriz pedida es $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$.

a) [1 punto] Calcula $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$

b) [1,5 puntos] Calcula $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$

SOLUCIÓN

Llamamos $F_1 = (a, b, c)$, $F_2 = (p, q, r)$, $F_3 = (x, y, z)$ a las filas de la matriz original, con $|F_1, F_2, F_3| = -2$.

Apartado a)

Idea clave

Reconocemos las filas de la nueva matriz como transformaciones sencillas de las filas originales: intercambio de columnas (que corresponde a intercambiar b y c en cada fila) junto con un intercambio de filas y un reescalado.

Observamos que la nueva matriz se obtiene de la original mediante los siguientes pasos, siguiendo el orden y anotando el efecto sobre el determinante:

Paso 1 (intercambiar columnas 2 y 3): la matriz pasa a tener filas (a, c, b) , (p, r, q) , (x, z, y) . Como un intercambio de columnas cambia el signo del determinante:

$$\det = -(-2) = 2.$$

Paso 2 (intercambiar las filas 2 y 3): pasamos a $(a, c, b), (x, z, y), (p, r, q)$. Un intercambio de filas cambia de nuevo el signo:

$$\det = -(2) = -2.$$

Paso 3 (multiplicar la fila 2 por 2 y la fila 3 por -3): llegamos a $(a, c, b), (2x, 2z, 2y), (-3p, -3r, -3q)$, que es exactamente la matriz pedida. Cada multiplicación de una fila por una constante multiplica el determinante por esa constante:

$$\det = -2 \times 2 \times (-3) = 12.$$

El determinante pedido vale 12.

Apartado b)

Idea clave

Aquí las columnas de la nueva matriz son combinaciones lineales de las filas de la matriz original (no de sus columnas): la primera columna es F_3 , la segunda es $F_1 - 3F_2$, y la tercera es $-2F_1$. Cuando las columnas de una matriz P se obtienen como combinaciones lineales de las filas de otra matriz M mediante una matriz de coeficientes T (es decir, $P = M^t T$), se cumple $|P| = |M| \cdot |T|$.

Comprobamos la identificación de columnas:

$$\text{Columna 1} = (x, y, z) = F_3, \quad \text{Columna 2} = (a-3p, b-3q, c-3r) = F_1 - 3F_2, \quad \text{Columna 3} = (-2a, -2b, -2c) = -2F_1.$$

La matriz de coeficientes T (cuya columna j da los coeficientes de la combinación de F_1, F_2, F_3 que produce la columna j de la nueva matriz) es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $|T|$ desarrollando por la primera columna (solo un elemento no nulo):

$$|T| = 1 \cdot (+1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1(0) - (-2)(-3)) = 0 - 6 = -6.$$

Por tanto:

$$\det(\text{nueva matriz}) = |M| \cdot |T| = (-2)(-6) = 12.$$

El determinante pedido también vale 12.

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Considera las rectas $r \equiv x + 1 = y - a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.

b) [1 punto] Halla la ecuación del plano que pasa por $P(8, -7, 2)$ y que contiene a la recta s .

SOLUCIÓN**Apartado a)**

Parametrizamos r con el parámetro t (igualando cada expresión de la ecuación continua a t):

$$x + 1 = t \implies x = t - 1, \quad y - a = t \implies y = a + t, \quad -z = t \implies z = -t.$$

Igualamos r y s (con parámetro λ para s):

$$\begin{cases} t - 1 = 5 + 2\lambda \\ a + t = -3 \\ -t = 2 - \lambda \end{cases}$$

De la tercera ecuación: $\lambda = t + 2$. Sustituimos en la primera:

$$t - 1 = 5 + 2(t + 2) \implies t - 1 = 5 + 2t + 4 \implies t - 1 = 2t + 9 \implies -t = 10 \implies t = -10.$$

Entonces $\lambda = -10 + 2 = -8$. Sustituimos $t = -10$ en la segunda ecuación:

$$a + (-10) = -3 \implies a = 7.$$

Idea clave

Con a ya determinado, el punto de corte se obtiene sustituyendo $t = -10$ en la parametrización de r (o, equivalentemente, $\lambda = -8$ en la de s ; el resultado debe coincidir).

Calculamos el punto de corte con $t = -10$:

$$(x, y, z) = (t - 1, a + t, -t) = (-11, 7 - 10, 10) = (-11, -3, 10).$$

Comprobación con s ($\lambda = -8$): $(5 + 2(-8), -3, 2 - (-8)) = (5 - 16, -3, 10) = (-11, -3, 10)$

El valor pedido es $a = 7$, y el punto de corte es $(-11, -3, 10)$.

Apartado b)

La recta s pasa por $P_0 = (5, -3, 2)$ (con $\lambda = 0$) con dirección $\vec{d}_s = (2, 0, -1)$.

Idea clave

Para construir el plano que contiene a s y pasa por P , necesitamos dos direcciones contenidas en el plano: la de la recta s , y el vector que va de un punto de s hasta P . El producto vectorial de ambas da el vector normal.

Calculamos $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (8 - 5, -7 - (-3), 2 - 2) = (3, -4, 0)$.

El vector normal es:

$$\vec{n} = \vec{d}_s \times \overrightarrow{P_0P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (0(0) - (-1)(-4), -[2(0) - (-1)(3)], 2(-4) - 0(3)) = (-4, -3, -8).$$

La ecuación del plano, usando el punto $P(8, -7, 2)$:

$$-4(x - 8) - 3(y + 7) - 8(z - 2) = 0.$$

Desarrollamos:

$$-4x + 32 - 3y - 21 - 8z + 16 = 0 \implies -4x - 3y - 8z + 27 = 0.$$

Comprobación: $P_0(5, -3, 2)$: $-4(5) - 3(-3) - 8(2) + 27 = -20 + 9 - 16 + 27 = 0$

El plano pedido es $-4x - 3y - 8z + 27 = 0$.

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)

ENUNCIADO

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

a) [0,75 puntos] Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r .

b) [1,75 puntos] Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π .

SOLUCIÓN

Apartado a)

Parametrizamos r con el parámetro s : $x = s$, $y = 3s$, $z = 1 + s$.

Sustituimos en la ecuación de π :

$$s + 3s - (1 + s) = 2 \implies s + 3s - 1 - s = 2 \implies 3s - 1 = 2 \implies s = 1.$$

El punto de intersección es:

$$(x, y, z) = (1, 3, 1 + 1) = (1, 3, 2).$$

Comprobación: $1 + 3 - 2 = 2$

El punto de intersección es $(1, 3, 2)$.

Apartado b)

El plano π tiene normal $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

Idea clave

Para hallar el simétrico de un punto respecto a un plano, buscamos primero el pie de la perpendicular H (intersección del plano con la recta perpendicular a π que pasa por Q), y después aplicamos $Q' = 2H - Q$.

La recta perpendicular a π por $Q(2, 6, 3)$ es $(x, y, z) = (2, 6, 3) + \mu(1, 1, -1)$. Sustituimos en la ecuación de π :

$$(2 + \mu) + (6 + \mu) - (3 - \mu) = 2 \implies 2 + \mu + 6 + \mu - 3 + \mu = 2 \implies 3\mu + 5 = 2 \implies \mu = -1.$$

El pie de la perpendicular es:

$$H = (2 - 1, 6 - 1, 3 + 1) = (1, 5, 4).$$

Comprobación: $1 + 5 - 4 = 2$.

Calculamos el punto simétrico:

$$Q' = 2H - Q = 2(1, 5, 4) - (2, 6, 3) = (2 - 2, 10 - 6, 8 - 3) = (0, 4, 5).$$

El punto simétrico de Q respecto de π es $Q' = (0, 4, 5)$.
