

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Ordinaria 2023

Matemáticas II

Sèrie 1

Baremo e instrucciones

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, es necesario que lo indiquéis claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates: el examen original permite elegir 4 de las 6 cuestiones. Como recurso de estudio, aquí resolvemos las 6 de forma completa.

PREGUNTA 1: Función polinómica: punto de inflexión y extremo relativo**ENUNCIADO**

Calculad los coeficientes a , b , c y d de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabemos que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de inflexión $(1, 0)$ es $y = -3x + 3$ y que la función tiene un extremo relativo en el punto de la gráfica de abscisa $x = 0$.

[2,5 puntos]

SOLUCIÓN

Tenemos cuatro incógnitas (a, b, c, d) , así que necesitamos cuatro ecuaciones. El enunciado nos da, en realidad, cuatro condiciones distintas, aunque algunas se leen “entre líneas”.

Idea clave

Cada dato geométrico del enunciado se traduce en una condición algebraica sobre f , f' o f'' :

- que $(1, 0)$ sea un punto de la gráfica $\Rightarrow f(1) = 0$;
- que la tangente en ese punto tenga pendiente -3 (coeficiente de x en $y = -3x + 3$) $\Rightarrow f'(1) = -3$;
- que $(1, 0)$ sea un punto de **inflexión** $\Rightarrow f''(1) = 0$;
- que haya un **extremo relativo** en $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$.

Calculamos las derivadas:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

Imponemos las cuatro condiciones:

1) $f(1) = 0$:

$$a + b + c + d = 0.$$

2) $f'(1) = -3$:

$$3a + 2b + c = -3.$$

3) $f''(1) = 0$:

$$6a + 2b = 0 \implies b = -3a.$$

4) $f'(0) = -3 \cdot a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$, es decir, $c = 0$.

Sustituimos $c = 0$ y $b = -3a$ en las dos primeras ecuaciones:

De la ecuación 1): $a + (-3a) + 0 + d = 0 \Rightarrow -2a + d = 0 \Rightarrow d = 2a$.

De la ecuación 2): $3a + 2(-3a) + 0 = -3 \Rightarrow 3a - 6a = -3 \Rightarrow -3a = -3 \Rightarrow a = 1$.

Con $a = 1$: $b = -3(1) = -3$, $d = 2(1) = 2$, $c = 0$.

$$a = 1, \quad b = -3, \quad c = 0, \quad d = 2$$

Es decir, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Idea clave

Como comprobación rápida: $f(1) = 1 - 3 + 0 + 2 = 0$ ✓; $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(1) = 3 - 6 = -3$ ✓, $f'(0) = 0$ ✓; $f''(x) = 6x - 6$, $f''(1) = 0$ ✓. Los cuatro datos del enunciado se cumplen.

PREGUNTA 2: Matrices: productos y matrices idempotentes

ENUNCIADO

Considerad las dos matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a (1,5 puntos) Calculad las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

b (1 punto) Sean C y D dos matrices cuadradas del mismo orden que satisfacen $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$. Comprobad que las dos matrices, C y D , son idempotentes.

Nota: Una matriz cuadrada se llama idempotente si coincide con su cuadrado.

SOLUCIÓN

a) Multiplicamos fila por columna.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Idea clave

El resultado es llamativo: $A \cdot B = A$ y $B \cdot A = B$, exactamente la propiedad abstracta que se explora en el apartado b). Es decir, estas matrices A y B concretas son un ejemplo del par (C, D) del apartado siguiente.

b) Partimos de las hipótesis $C \cdot D = C$ y $D \cdot C = D$, y queremos ver que $C^2 = C$ y $D^2 = D$.

Idea clave

La clave está en sustituir una hipótesis dentro de la otra, aprovechando la propiedad asociativa del producto de matrices: $(C \cdot D) \cdot C = C \cdot (D \cdot C)$.

Veamos que C es idempotente. Partiendo de $C = C \cdot D$ (hipótesis), multiplicamos ambos lados por C por la derecha:

$$C \cdot C = (C \cdot D) \cdot C.$$

Por la propiedad asociativa:

$$(C \cdot D) \cdot C = C \cdot (D \cdot C).$$

Y por la segunda hipótesis, $D \cdot C = D$, así que

$$C \cdot (D \cdot C) = C \cdot D = C.$$

Encadenando las igualdades:

$$C^2 = C \cdot C = (C \cdot D) \cdot C = C \cdot (D \cdot C) = C \cdot D = C.$$

$$\boxed{C^2 = C}$$

Veamos ahora que D es idempotente, con el mismo razonamiento pero intercambiando los papeles. Partiendo de $D = D \cdot C$ (hipótesis), multiplicamos por D por la derecha:

$$D^2 = D \cdot D = (D \cdot C) \cdot D = D \cdot (C \cdot D) = D \cdot C = D.$$

$$\boxed{D^2 = D}$$

Por tanto, C y D son ambas idempotentes.

PREGUNTA 3: Reconstrucción de una función a partir de su derivada**ENUNCIADO**

Sea

$$f'(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

la función derivada de una función derivable $f(x)$ que pasa por el punto $A = (0, 3)$.

a (1,5 puntos) Calculad la función $f(x)$.

b (1 punto) Calculad la ecuación de la recta tangente a la función $f'(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

SOLUCIÓN

a) Para recuperar $f(x)$ integramos $f'(x)$ en cada tramo por separado.

Idea clave

Como f es derivable (dato del enunciado), en particular es continua en todo $\mathbb{R}$, incluido el punto de empalme $x = 2$. Esa continuidad es justo lo que nos permite fijar la constante de integración del segundo tramo a partir del primero.

Tramo $x \leq 2$: integramos $f'(x) = x - 1$:

$$f(x) = \int (x - 1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1.$$

Usamos que f pasa por $A = (0, 3)$, es decir, $f(0) = 3$ (el punto $x = 0$ cae en este tramo, ya que $0 \leq 2$):

$$\frac{0^2}{2} - 0 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 3.$$

Así, para $x \leq 2$:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3.$$

Evaluamos en el extremo del tramo: $f(2) = \frac{4}{2} - 2 + 3 = 2 - 2 + 3 = 3$.

Tramo $x > 2$: integramos $f'(x) = \frac{1}{x-1}$:

$$f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C_2 = \ln(x-1) + C_2 \quad (\text{pues } x > 2 \Rightarrow x-1 > 0).$$

Imponemos la continuidad de f en $x = 2$: el valor de este tramo cuando $x \rightarrow 2^+$ debe coincidir con el valor $f(2) = 3$ ya obtenido:

$$\ln(2-1) + C_2 = \ln(1) + C_2 = 0 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 3.$$

Así, para $x > 2$:

$$f(x) = \ln(x-1) + 3.$$

Juntando los dos tramos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + 3, & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-1) + 3, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Ahora se nos pide la tangente a la función *derivada* $f'(x)$ (no a f) en $x = 3$. Como $3 > 2$, usamos la rama $f'(x) = \frac{1}{x-1}$.

Idea clave

Es fácil confundir este apartado con “la tangente a f ”; aquí el papel de “la función” lo hace $f'(x)$, así que necesitamos su propia derivada, $f''(x)$, para construir la tangente.

Necesitamos el valor de $f'(x)$ en $x = 3$ y la pendiente, que es $f''(3)$ (la derivada de f' , es decir, la derivada segunda de f):

$$f'(3) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

Derivamos $f'(x) = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}$:

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}, \quad f''(3) = -\frac{1}{(3-1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

La recta tangente a $y = f'(x)$ en $x = 3$ es

$$y - f'(3) = f''(3)(x-3) \implies y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-3).$$

Desarrollando:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}.$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

PREGUNTA 4: Sistema de ecuaciones con parámetro λ **ENUNCIADO**

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real λ :

$$\left. \begin{aligned} x + 2\lambda y + (2 + \lambda)z &= 0 \\ (2 + \lambda)x + y + 2\lambda z &= 3 \\ 2\lambda x + (2 + \lambda)y + z &= -3 \end{aligned} \right\}$$

a (1,25 puntos) Discutid el sistema para los diferentes valores del parámetro λ .

b (1,25 puntos) Para el caso $\lambda = -1$, resolved el sistema, interpretadlo geométricamente e identificad la solución.

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda & 2 + \lambda \\ 2 + \lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2 + \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante (es una matriz circulante, pero también puede desarrollarse directamente

por la primera fila o por Sarrus):

$$\det(M) = 9(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Idea clave

El factor $\lambda^2 - \lambda + 1$ tiene discriminante $(-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$, así que **no tiene raíces reales**: para todo λ real es estrictamente positivo. El único valor real que anula el determinante es, por tanto, $\lambda = -1$.

Caso $\lambda \neq -1$: $\det(M) \neq 0$, así que $\text{rango}(M) = 3 = \text{n.º de incógnitas}$, y también $\text{rango}(M^*) = 3$ (no puede ser mayor). El sistema es **compatible determinado** (solución única).

Caso $\lambda = -1$: sustituyendo,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right).$$

Se comprueba que $\text{rango}(M) = 2$ (la tercera fila es combinación de las dos primeras: $\text{fila}_3 = -(\text{fila}_1 + \text{fila}_2)$) y que esa misma combinación se cumple en los términos independientes ($-(0 + 3) = -3$), así que $\text{rango}(M^*) = 2$ también. Como $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2 < 3$ (n.º de incógnitas), el sistema es **compatible indeterminado**, con un grado de libertad.

b) Resolvemos para $\lambda = -1$. El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 3 \\ -2x + y + z = -3 \end{array} \right\}$$

Tomamos $z = t$ como parámetro. De la 1.ª ecuación: $x = 2y - z = 2y - t$. Sustituyendo en la 2.ª: $(2y - t) + y - 2t = 3 \Rightarrow 3y - 3t = 3 \Rightarrow y = t + 1$.

Entonces $x = 2(t + 1) - t = 2t + 2 - t = t + 2$.

$$(x, y, z) = (t + 2, t + 1, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Idea clave

Comprobación con la 3.ª ecuación: $-2(t + 2) + (t + 1) + t = -2t - 4 + t + 1 + t = -3$ ✓, se cumple para cualquier t , confirmando que es efectivamente compatible indeterminado.

Interpretación geométrica: cada ecuación del sistema representa un plano en $\mathbb{R}^3$. Como el sistema es compatible indeterminado con un único grado de libertad (rango 2 en una situación de 3 incógnitas), los tres planos **se cortan en una recta común** (no tienen un único punto en común, sino una recta entera de puntos comunes).

La solución puede escribirse en forma de ecuación vectorial de esa recta, tomando $t = 0$ para obtener un punto de paso y leyendo el vector director de los coeficientes de t :

$$(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

PREGUNTA 5: Optimización: el cercado del jardín**ENUNCIADO**

Núria tiene un jardín rectangular y quiere hacer en él un cercado (rectangular o cuadrado) de 8 m^2 para su perro. Ha pensado poner el cercado tocando el muro del jardín, tal como se muestra en la figura, para ahorrarse así uno de los cuatro lados.

El precio de la valla que quiere utilizar es de $2,5 \text{ €/m}$.

a (1,75 puntos) ¿Qué dimensiones debe tener el cercado para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es este coste mínimo?

b (0,75 puntos) Si mantenéis la forma rectangular o cuadrada del cercado y hacéis que uno de los vértices del jardín coincida con un vértice del cercado, ¿cuántos euros os podéis ahorrar? Razonad cómo pondríais el cercado y justificad con cálculos matemáticos las dimensiones de vuestra propuesta.

SOLUCIÓN

a) Llamamos x al lado del cercado paralelo al muro (el lado “libre”, opuesto al muro) e y a cada uno de los dos lados perpendiculares al muro. Como el cercado toca el muro por un lado completo, ese lado no necesita valla: solo hay que vallar los otros tres lados.

Idea clave

El paso clave de todo problema de optimización con una restricción es despejar una variable de la restricción (aquí, el área) y sustituirla en la función que se quiere minimizar (aquí, el coste), para quedarnos con una única variable.

La restricción de área es

$$x \cdot y = 8 \implies y = \frac{8}{x}.$$

La longitud total de valla necesaria (tres lados: uno de longitud x y dos de longitud y) es $x + 2y$, así que el coste es

$$C(x) = 2,5(x + 2y) = 2,5\left(x + \frac{16}{x}\right), \quad x > 0.$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$C'(x) = 2,5\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) = 0 \implies x^2 = 16 \implies x = 4 \quad (x > 0).$$

Comprobamos que es un mínimo con la derivada segunda:

$$C''(x) = 2,5 \cdot \frac{32}{x^3}, \quad C''(4) = 2,5 \cdot \frac{32}{64} = 1,25 > 0.$$

Como $C''(4) > 0$, se trata efectivamente de un **mínimo**.

Con $x = 4$: $y = \frac{8}{4} = 2$.

$$\boxed{x = 4 \text{ m}, \quad y = 2 \text{ m}}$$

El coste mínimo es

$$C(4) = 2,5\left(4 + \frac{16}{4}\right) = 2,5(4 + 4) = 2,5 \cdot 8 = 20.$$

$$\text{Coste mínimo} = 20 \text{ €}$$

b) Ahora el cercado se coloca de modo que un vértice del jardín coincida con un vértice del cercado: se aprovechan **dos** lados del jardín (los dos muros que forman esa esquina) en vez de uno solo. Por tanto, ahora solo hay que vallar **dos** lados (los dos opuestos a los muros), no tres.

Idea clave

La diferencia clave con el apartado a) es que aquí se ahorra un lado más: antes se vallaban 3 lados ($x + 2y$), ahora solo 2 ($x + y$). El planteamiento matemático es el mismo tipo de optimización, solo cambia la función de coste.

Con la misma restricción de área, $y = \frac{8}{x}$, el coste ahora es

$$C_2(x) = 2,5(x + y) = 2,5\left(x + \frac{8}{x}\right), \quad x > 0.$$

Derivamos:

$$C_2'(x) = 2,5\left(1 - \frac{8}{x^2}\right) = 0 \implies x^2 = 8 \implies x = 2\sqrt{2}.$$

Comprobamos que es mínimo: $C_2''(x) = 2,5 \cdot \frac{16}{x^3} > 0$ para $x > 0$, así que sí es un mínimo.

Con $x = 2\sqrt{2}$: $y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Es decir, el cercado óptimo en este caso es **cuadrado**, de lado $2\sqrt{2} \approx 2,83$ m.

El coste mínimo es

$$C_2(2\sqrt{2}) = 2,5(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = 2,5 \cdot 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \approx 14,14 \text{ €}.$$

El ahorro respecto al apartado a) es

$$20 - 10\sqrt{2} \approx 20 - 14,14 = 5,86 \text{ €}.$$

$$\text{Ahorro} = 20 - 10\sqrt{2} \approx 5,86 \text{ €}$$

Idea clave

Tiene sentido que aprovechar dos lados del jardín en vez de uno salga más barato: cuantos menos metros de valla haya que comprar, menor será el coste. El resultado también ilustra un patrón general de optimización: cuando la restricción es simétrica en x e y (aquí, $x + y$ con xy fijo), el óptimo se alcanza en el caso simétrico $x = y$, es decir, el cuadrado.

PREGUNTA 6: Geometría del espacio: planos perpendiculares y recta de intersección

ENUNCIADO

Sean los planos π_1 y π_2 , determinados respectivamente por las ecuaciones $\pi_1 : x + y = 3$ y $\pi_2 : x - z = -2$.

a (0,75 puntos) Encontrad la ecuación general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π_3 , que es perpendicular

a π_1 y π_2 , y que pasa por el punto $P = (4, 1, 2)$.

b (0,75 puntos) Sea r la recta de intersección de π_1 y π_2 . Calculad la ecuación vectorial de la recta r .

c (1 punto) Calculad el punto Q de la recta r que está más cerca del punto P .

SOLUCIÓN

a) Los vectores normales de π_1 y π_2 son

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 0), \quad \vec{n}_2 = (1, 0, -1).$$

Idea clave

Que un plano π_3 sea perpendicular a otro plano equivale a que sus vectores normales sean perpendiculares entre sí. Pedir que π_3 sea perpendicular a la vez a π_1 y a π_2 significa que $\vec{n}_3$ debe ser perpendicular a $\vec{n}_1$ y a $\vec{n}_2$ simultáneamente: esa es exactamente la definición del producto vectorial $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Calculamos el vector normal de π_3 como el producto vectorial:

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0, -(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1), 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (-1, 1, -1).$$

El plano π_3 pasa por $P = (4, 1, 2)$ con vector normal $\vec{n}_3 = (-1, 1, -1)$ (o, equivalentemente, $(1, -1, 1)$):

$$1(x - 4) - 1(y - 1) + 1(z - 2) = 0.$$

Desarrollando:

$$x - 4 - y + 1 + z - 2 = 0 \implies x - y + z - 5 = 0.$$

$$\boxed{\pi_3 : x - y + z - 5 = 0}$$

b) La recta r es la intersección de π_1 y π_2 . Tomamos $x = t$ como parámetro:

$$\text{De } \pi_1 : x + y = 3 \implies y = 3 - t.$$

$$\text{De } \pi_2 : x - z = -2 \implies z = x + 2 = t + 2.$$

$$r : (x, y, z) = (t, 3 - t, t + 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Separando el punto de paso (con $t = 0$) y el vector director (coeficientes de t):

$$\boxed{r : (x, y, z) = (0, 3, 2) + t(1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Buscamos el punto Q de r más cercano a $P = (4, 1, 2)$. Un punto genérico de r es $Q = (t, 3 - t, t + 2)$.

Idea clave

El punto de una recta más cercano a un punto exterior es aquel para el cual el vector que los une es perpendicular a la propia recta. Esto convierte el problema de mínima distancia en una simple ecuación de perpendicularidad (producto escalar igual a cero), sin necesidad de derivar ninguna función de distancia.

El vector que va de P a Q es

$$\vec{PQ} = Q - P = (t - 4, 3 - t - 1, t + 2 - 2) = (t - 4, 2 - t, t).$$

Para que Q sea el punto más cercano, $\vec{PQ}$ debe ser perpendicular al vector director de r , $\vec{d} = (1, -1, 1)$:

$$\vec{PQ} \cdot \vec{d} = 0 \implies (t - 4)(1) + (2 - t)(-1) + (t)(1) = 0.$$

Desarrollando:

$$(t - 4) - (2 - t) + t = 0 \implies t - 4 - 2 + t + t = 0 \implies 3t - 6 = 0 \implies t = 2.$$

Sustituyendo $t = 2$ en la parametrización de r :

$$Q = (2, 3 - 2, 2 + 2) = (2, 1, 4).$$

$$\boxed{Q = (2, 1, 4)}$$

Prueba de Acceso a la Universidad

Catalunya -- Ordinaria 2023

Matemáticas II

Sèrie 5

Baremo e instrucciones

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información.

Podéis utilizar las páginas en blanco para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, es necesario que lo indiquéis claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Nota de Entiende Mates: el examen original permite elegir 4 de las 6 cuestiones. Como recurso de estudio, aquí resolvemos las 6 de forma completa.

PREGUNTA 1: Área entre curvas y recta tangente**ENUNCIADO**

Considerad las funciones $f(x) = -x^2 + x + 6$ y $g(x) = -9x + 3x^2$.

a (1,25 puntos) Calculad el área de la región delimitada por las dos funciones.

b (1,25 puntos) Encontrad la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(-2, 0)$. Representad esta recta tangente y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en unos mismos ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN

a) Primero encontramos los puntos de corte entre f y g , que son los límites de integración de la región delimitada.

Idea clave

El área entre dos curvas siempre se calcula igual: primero se hallan los puntos donde se cortan (resolviendo $f(x) = g(x)$), y luego se integra la diferencia entre la curva de arriba y la de abajo en ese tramo.

Igualamos $f(x) = g(x)$:

$$-x^2 + x + 6 = -9x + 3x^2.$$

Pasamos todo a un lado:

$$0 = 3x^2 + x^2 - 9x - x - 6 = 4x^2 - 10x - 6.$$

Simplificamos dividiendo por 2:

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Resolvemos con la fórmula general:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}.$$

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{2}.$$

Para saber cuál función queda por encima en ese tramo, evaluamos la diferencia $f - g$ en un punto intermedio, por ejemplo $x = 1$:

$$(f - g)(1) = (-1 + 1 + 6) - (-9 + 3) = 6 - (-6) = 12 > 0.$$

Como $f - g > 0$ en el tramo, f queda por encima de g entre $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 3$. El área es

$$S = \int_{-1/2}^3 (f(x) - g(x)) dx.$$

Calculamos la función diferencia:

$$f(x) - g(x) = (-x^2 + x + 6) - (-9x + 3x^2) = -4x^2 + 10x + 6.$$

Integramos:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^3 (-4x^2 + 10x + 6) dx &= \left[-\frac{4x^3}{3} + 5x^2 + 6x \right]_{-1/2}^3 \\ &= \left(-\frac{4 \cdot 27}{3} + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{4 \cdot (-1/8)}{3} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= (-36 + 45 + 18) - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{4} - 3 \right) \\ &= 27 - \left(-\frac{19}{12} \right) \\ &= 27 + \frac{19}{12} = \frac{324 + 19}{12} = \frac{343}{12}. \end{aligned}$$

$$S = \frac{343}{12} \text{ u}^2 \approx 28,58 \text{ u}^2$$

b) Necesitamos la pendiente de la tangente en $x = -2$, que es $f'(-2)$.

Comprobamos primero que el punto $(-2, 0)$ está efectivamente sobre f :

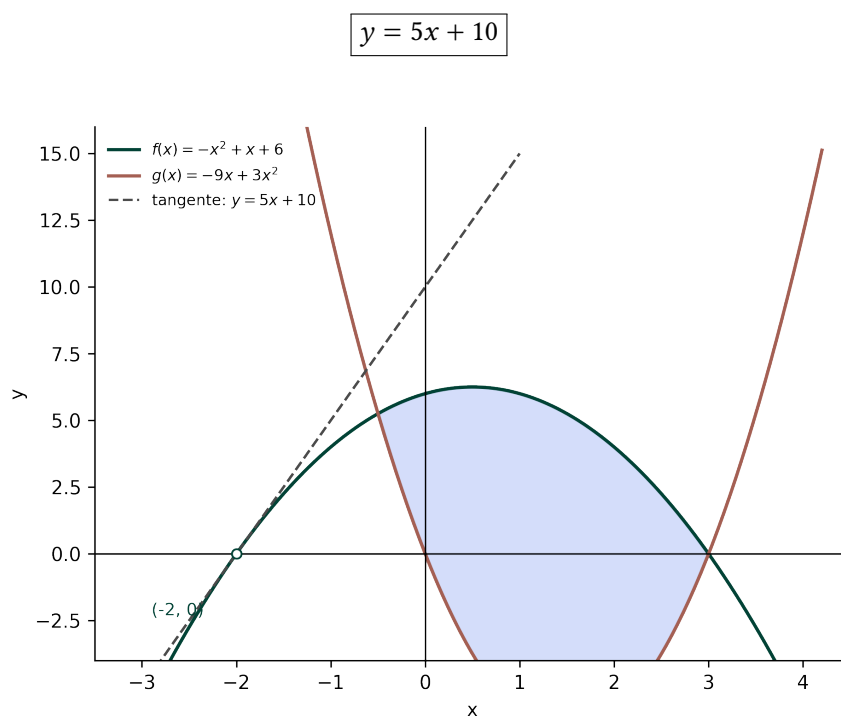
$$f(-2) = -(-2)^2 + (-2) + 6 = -4 - 2 + 6 = 0. \quad \square$$

Derivamos:

$$f'(x) = -2x + 1, \quad f'(-2) = -2(-2) + 1 = 4 + 1 = 5.$$

La recta tangente es

$$y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2)) \implies y - 0 = 5(x + 2).$$

**Idea clave**

En la representación se aprecia bien el significado geométrico de cada resultado: la región sombreada (en azul) es exactamente el área calculada en el apartado a), y la recta discontinua es tangente a f justo en el punto $(-2, 0)$, tocando la parábola f sin cruzarla en ese entorno.

PREGUNTA 2: Sistema de ecuaciones con parámetro k **ENUNCIADO**

Considerad el sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{l} x - y + kz = -1 \\ x + ky + z = 3 \\ 2x + (k - 1)y + 2z = 2 \end{array} \right\}$$

en que k es un parámetro real.

a (1,5 puntos) Discutid el sistema en función del valor de k .

b (1 punto) Resolved el sistema para $k = 0$ y para $k = 1$.

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 2 & k - 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante:

$$\det(M) = -(k-1)(k+1) = -k^2 + 1.$$

Idea clave

El determinante se anula en $k = 1$ y en $k = -1$: son los dos únicos valores que hay que discutir aparte. Para cualquier otro valor de k , el sistema tiene solución única.

Caso $k \neq 1$ y $k \neq -1$: $\det(M) \neq 0$, así que $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 3$. El sistema es **compatible determinado**.

Caso $k = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Se comprueba que $\text{rango}(M) = 2$ (la 3.ª fila de M es la suma de las dos primeras) y que esa misma relación se cumple con los términos independientes ($-1 + 3 = 2$), así que $\text{rango}(M^*) = 2$ también. Como ambos rangos coinciden y son menores que 3, el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones, con un grado de libertad).

Caso $k = -1$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Aquí $\text{rango}(M) = 2$ (la 3.ª fila de M es el doble de la 2.ª), pero esa misma relación **no** se cumple en los términos independientes ($2 \cdot 3 = 6 \neq 2$), así que $\text{rango}(M^*) = 3$. Como $\text{rango}(M) \neq \text{rango}(M^*)$, el sistema es **incompatible** (no tiene solución).

b) Para $k = 0$, el sistema es compatible determinado (caso general). El sistema queda

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ x + 1 \cdot 0 \cdot y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ x + z = 3 \end{array} \right\}$$

De la 1.ª ecuación: $x = y - 1$. De la 2.ª: $z = 3 - x = 3 - (y - 1) = 4 - y$.

Sustituyendo en la 3.ª: $2(y - 1) - y + 2(4 - y) = 2 \Rightarrow 2y - 2 - y + 8 - 2y = 2 \Rightarrow -y + 6 = 2 \Rightarrow y = 4$.

Entonces $x = 4 - 1 = 3$ y $z = 4 - 4 = 0$.

$$(x, y, z) = (3, 4, 0) \quad (k = 0)$$

Para $k = 1$, ya sabemos (apartado a) que el sistema es compatible indeterminado. Tomamos $z = t$ como parámetro. El sistema con $k = 1$ es

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 2z = 2 \end{array} \right\}$$

De la 3.ª ecuación: $2x + 2z = 2 \Rightarrow x + z = 1 \Rightarrow x = 1 - z = 1 - t$.

Sustituyendo en la 2.ª: $(1 - t) + y + t = 3 \Rightarrow 1 + y = 3 \Rightarrow y = 2$.

$$(x, y, z) = (1 - t, 2, t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (k = 1)$$

Idea clave

Comprobación con la 1.ª ecuación: $(1 - t) - 2 + t = 1 - t - 2 + t = -1 \neq$, se cumple para cualquier t , tal como corresponde a un sistema compatible indeterminado.

PREGUNTA 3: Posición relativa de dos rectas y distancia entre ellas

ENUNCIADO

Considerad las rectas en el espacio $r : x = -y = z + m$ y $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$, en que m es un parámetro real.

a (1,25 puntos) Estudiad la posición relativa para los diferentes valores del parámetro m .

b (1,25 puntos) Calculad m para que la distancia entre las rectas r y s sea de $\sqrt{2}$ unidades.

SOLUCIÓN

a) Primero escribimos ambas rectas en forma paramétrica, para identificar un punto y un vector director de cada una.

Para $r : x = -y = z + m$, llamamos t al valor común: $x = t$, $-y = t \Rightarrow y = -t$, $z + m = t \Rightarrow z = t - m$.

$$r : (x, y, z) = (0, 0, -m) + t(1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para s , de $x - z = 0$ tenemos $z = x$; tomando $x = t$ como parámetro, de $x + y = 1$ obtenemos $y = 1 - t$.

$$s : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Idea clave

Lo primero que hay que mirar en un problema de posición relativa de rectas es si los vectores directores son proporcionales (rectas paralelas o coincidentes) o no (rectas secantes o que se cruzan). Aquí ambos vectores directores son literalmente el mismo, $(1, -1, 1)$, así que r y s son **siempre paralelas**, sea cual sea m .

Como los vectores directores de r y s son iguales, $(1, -1, 1)$, las rectas son **paralelas** para cualquier valor de m . Falta ver si, además, podrían llegar a coincidir para algún valor concreto de m .

Para que coincidieran, el punto de s , $(0, 1, 0)$, debería satisfacer las ecuaciones de r . Pero las ecuaciones de r exigen $x = -y$, y en el punto $(0, 1, 0)$ se tiene $x = 0$ e $y = 1$, es decir, $0 = -1$, lo cual es **falso** independientemente del valor de m (el parámetro m solo afecta a la coordenada z del punto de paso, no a esta condición).

Para todo $m \in \mathbb{R}$, r y s son rectas paralelas y distintas (nunca coincidentes).

b) Como son rectas paralelas, la distancia entre ellas se calcula tomando un punto de cada recta y proyectando perpendicularmente al vector director común.

Idea clave

La fórmula de la distancia entre dos rectas paralelas con vector director común $\vec{d}$ es $d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$, donde P y Q son puntos cualesquiera de cada recta. Es la misma idea que la distancia de un punto a una recta, usando un punto de la otra recta como referencia.

Tomamos $P = (0, 0, -m) \in r$ y $Q = (0, 1, 0) \in s$, con $\vec{d} = (1, -1, 1)$.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 1, m).$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - m \cdot (-1), -(0 \cdot 1 - m \cdot 1), 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = (1 + m, m, -1).$$

Su módulo al cuadrado es

$$|\overrightarrow{PQ} \times \vec{d}|^2 = (1 + m)^2 + m^2 + (-1)^2 = (1 + m)^2 + m^2 + 1.$$

$$Y |\vec{d}|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3.$$

La distancia es

$$d(m) = \sqrt{\frac{(1 + m)^2 + m^2 + 1}{3}}.$$

Imponemos $d(m) = \sqrt{2}$, es decir, $d(m)^2 = 2$:

$$\frac{(1 + m)^2 + m^2 + 1}{3} = 2 \implies (1 + m)^2 + m^2 + 1 = 6.$$

Desarrollando:

$$1 + 2m + m^2 + m^2 + 1 = 6 \implies 2m^2 + 2m + 2 = 6 \implies 2m^2 + 2m - 4 = 0 \implies m^2 + m - 2 = 0.$$

Resolvemos:

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

$$\boxed{m = 1 \quad \text{o} \quad m = -2}$$

PREGUNTA 4: Optimización: la torre de comunicaciones

ENUNCIADO

En una carretera principal encontramos el pueblo A. A 12 km del pueblo A, hay un cruce O con una ca-

carretera secundaria que corta perpendicularmente la carretera principal. A 9 km del cruce, en la carretera secundaria, encontramos el pueblo B . Se quiere construir una torre de comunicaciones T en un punto de la carretera principal situado entre el pueblo A y el cruce O . Esta torre debe estar conectada con cada uno de los dos pueblos en línea recta por cable. Sabemos que instalar el cable entre la torre T y el pueblo B tiene un precio de 250 €/km y, en cambio, instalar el cable entre la torre T y el pueblo A tiene un precio de 125 €/km. Determinad a qué distancia del cruce O a la carretera principal hay que situar la torre T para que el precio del cableado sea mínimo y cuál será el valor de este precio mínimo.

[2,5 puntos]

SOLUCIÓN

Situamos el cruce O como origen de un sistema de referencia: la carretera principal es el eje horizontal, con $A = (12, 0)$, y la carretera secundaria es el eje vertical, con $B = (0, 9)$.

Idea clave

Colocar un sistema de coordenadas con origen en el cruce (el punto donde se unen las dos carreteras, que además forman ángulo recto) es lo que permite escribir la distancia TB con el teorema de Pitágoras de forma inmediata.

Sea x la distancia del cruce O a la torre T , con $T = (x, 0)$ y $0 \leq x \leq 12$. Entonces:

- Distancia de T a A : como T está entre O y A , esta distancia es $12 - x$.
- Distancia de T a B : por el teorema de Pitágoras (el triángulo OTB es rectángulo en O), $\sqrt{x^2 + 9^2} = \sqrt{x^2 + 81}$.

El coste total del cableado es

$$C(x) = 125(12 - x) + 250\sqrt{x^2 + 81}, \quad 0 \leq x \leq 12.$$

Derivamos:

$$C'(x) = -125 + 250 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 81}}.$$

Igualamos a cero:

$$250 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 81}} = 125 \implies \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 81}} = 1 \implies 2x = \sqrt{x^2 + 81}.$$

Idea clave

Al elevar al cuadrado para quitar la raíz, conviene recordar que solo tiene sentido si $2x \geq 0$ (lo cual se cumple, ya que $x \geq 0$), así que no se introduce ninguna solución espuria por el signo.

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$4x^2 = x^2 + 81 \implies 3x^2 = 81 \implies x^2 = 27 \implies x = 3\sqrt{3} \quad (x > 0).$$

Como $3\sqrt{3} \approx 5,196$, que está dentro del intervalo $[0, 12]$, el valor es válido.

Comprobamos que es un mínimo estudiando el signo de $C'(x)$: para $x < 3\sqrt{3}$, $\frac{2x}{\sqrt{x^2+81}} < 1$, así que $C'(x) < 0$ (decreciente); para $x > 3\sqrt{3}$, $C'(x) > 0$ (creciente). Por tanto, $x = 3\sqrt{3}$ es efectivamente un

mínimo.

$$x = 3\sqrt{3} \text{ km} \approx 5,20 \text{ km}$$

Calculamos el coste mínimo. Con $x = 3\sqrt{3}$: $\sqrt{x^2 + 81} = \sqrt{27 + 81} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

$$C(3\sqrt{3}) = 125(12 - 3\sqrt{3}) + 250 \cdot 6\sqrt{3} = 1500 - 375\sqrt{3} + 1500\sqrt{3} = 1500 + 1125\sqrt{3}.$$

$$C_{\min} = 1500 + 1125\sqrt{3} \text{ €} \approx 3448,56 \text{ €}$$

PREGUNTA 5: Familia de matrices simétricas 2×2

ENUNCIADO

Considerad la familia S de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, en que $a, b \in \mathbb{R}$.

a (1,25 puntos) Calculad $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

b (1,25 puntos) Encontrad todas las matrices de la familia S , es decir, de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, que verifiquen la igualdad $A^2 = I$, en que I es la matriz identidad de orden 2.

SOLUCIÓN

a) Las dos matrices dadas, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, son ambas de la forma de la familia S (con $a = 2, b = 3$ y $a = 2, b = 1$, respectivamente).

Idea clave

Para invertir una matriz 2×2 , $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ps - qr} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$, siempre que el determinante $ps - qr$ sea distinto de cero.

Calculamos primero la inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Su determinante es $2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \neq 0$, así que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos ahora:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in S$. Calculamos A^2 en general:

Idea clave

Al multiplicar A por sí misma, aprovechamos que A es simétrica en a y b : el resultado también tendrá esa misma estructura (misma forma que S), lo que simplifica identificar las condiciones sobre a y b .

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + ba \\ ba + ab & b^2 + a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Imponemos $A^2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, lo que da el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $2ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$.

Caso $a = 0$: de la primera ecuación, $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$. Obtenemos las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Caso $b = 0$: de la primera ecuación, $a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$. Obtenemos las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A \in \left\{ I, -I, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Idea clave

Tiene sentido que I y $-I$ aparezcan como soluciones “triviales” ($I^2 = I$ siempre, y $(-I)^2 = I$ también). Las otras dos matrices son menos evidentes, pero geoméricamente representan una simetría respecto a la recta $y = x$ (y su versión con signo cambiado), que aplicada dos veces también devuelve la identidad.

PREGUNTA 6: Función racional: extremo relativo y parámetros**ENUNCIADO**

Sea la función $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$.

a (1,25 puntos) Calculad los valores de los parámetros a y b si sabemos que la gráfica de la función f tiene un extremo relativo en $x = -1$ y pasa por el punto $P = \left(-2, \frac{13}{5}\right)$.

b (1,25 puntos) Para el caso $a = b$, calculad y clasificad los extremos relativos de la función.

SOLUCIÓN

a) Tenemos dos incógnitas, a y b , así que necesitamos dos ecuaciones: una de cada dato del enunciado.

Idea clave

“Extremo relativo en $x = -1$ ” se traduce en $f'(-1) = 0$; “pasa por el punto P ” se traduce en evaluar f en la abscisa de P e igualar a su ordenada.

Derivamos $f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x^2 + 1}$ con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(2ax + 1)(x^2 + 1) - (ax^2 + x + b)(2x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Condición 1: $f'(-1) = 0$. Como el denominador $(x^2 + 1)^2$ nunca se anula, basta con que se anule el numerador en $x = -1$:

$$(2a(-1) + 1)((-1)^2 + 1) - (a(-1)^2 + (-1) + b)(2(-1)) = 0.$$

Calculamos cada parte:

$$(-2a + 1)(2) - (a - 1 + b)(-2) = 0.$$

$$2(-2a + 1) + 2(a - 1 + b) = 0.$$

$$-4a + 2 + 2a - 2 + 2b = 0.$$

$$-2a + 2b = 0 \implies a = b.$$

Condición 2: $f(-2) = \frac{13}{5}$.

$$f(-2) = \frac{a(-2)^2 + (-2) + b}{(-2)^2 + 1} = \frac{4a - 2 + b}{5} = \frac{13}{5}.$$

Multiplicando por 5:

$$4a - 2 + b = 13 \implies 4a + b = 15.$$

Sustituyendo $a = b$ (de la condición 1):

$$4a + a = 15 \implies 5a = 15 \implies a = 3.$$

Y entonces $b = a = 3$.

$$a = 3, \quad b = 3$$

Idea clave

Comprobación: con $a = b = 3$, $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$. Verificamos $f(-2) = \frac{12 - 2 + 3}{5} = \frac{13}{5}$. Y precisamente el caso $a = b$ es el que se explora de forma general en el apartado b).

b) Para $a = b$, la función es

$$f(x) = \frac{ax^2 + x + a}{x^2 + 1}.$$

Derivamos igual que antes, pero ahora dejando a genérico. Retomamos el numerador de $f'(x)$ ya simplificado con la misma técnica del apartado a):

$$(2ax + 1)(x^2 + 1) - (ax^2 + x + a)(2x).$$

Desarrollamos término a término:

$$(2ax + 1)(x^2 + 1) = 2ax^3 + 2ax + x^2 + 1.$$

$$(ax^2 + x + a)(2x) = 2ax^3 + 2x^2 + 2ax.$$

Restando:

$$(2ax^3 + 2ax + x^2 + 1) - (2ax^3 + 2x^2 + 2ax) = -x^2 + 1.$$

Así,

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Idea clave

Es una simplificación notable: el parámetro a desaparece por completo de $f'(x)$. Esto significa que, para *cualquier* valor de a , los puntos críticos de f están siempre en $x = \pm 1$: el valor de a solo desplaza verticalmente los valores de f en esos puntos, no su ubicación en el eje x .

Igualamos $f'(x) = 0$:

$$1 - x^2 = 0 \implies x = \pm 1.$$

Estudiamos el signo de $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ (el denominador siempre es positivo, así que el signo de f' coincide con el signo de $1 - x^2$):

- Si $x < -1$: $1 - x^2 < 0 \implies f'(x) < 0$ (decreciente).
- Si $-1 < x < 1$: $1 - x^2 > 0 \implies f'(x) > 0$ (creciente).
- Si $x > 1$: $1 - x^2 < 0 \implies f'(x) < 0$ (decreciente).

En $x = -1$, f' pasa de negativa a positiva: se trata de un **mínimo relativo**. En $x = 1$, f' pasa de positiva a negativa: se trata de un **máximo relativo**.

Calculamos los valores de f en esos puntos (con $a = b$ genérico):

$$f(-1) = \frac{a(-1)^2 + (-1) + a}{(-1)^2 + 1} = \frac{a - 1 + a}{2} = \frac{2a - 1}{2}.$$

$$f(1) = \frac{a(1)^2 + 1 + a}{1^2 + 1} = \frac{a + 1 + a}{2} = \frac{2a + 1}{2}.$$

Mínimo relativo en $\left(-1, \frac{2a - 1}{2}\right)$, Máximo relativo en $\left(1, \frac{2a + 1}{2}\right)$.