

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2023

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Formato de este examen: elige 4 problemas de los 8 propuestos. Cada problema puntúa hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio es la suma de las calificaciones de los 4 problemas elegidos, dividida entre 4 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto ni fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Idea clave

Este examen usa el formato anterior de la Comunidad Valenciana: 8 problemas independientes de los que solo se responden 4. Aquí resolvemos los 8, como recurso de repaso completo.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PROBLEMA 1: Ecuación matricial con parámetro (10 puntos)**ENUNCIADO**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

- Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m . (4 puntos)
- Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

SOLUCIÓN

a) Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera columna, que solo tiene un elemento no nulo (el 1 en la posición superior izquierda):

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = m \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3.$$

Idea clave

El determinante ha salido -3 , una constante que **no depende de m** . Esto significa que A es invertible para **cualquier** valor de m , y por tanto A^2 también lo es siempre ($|A^2| = |A|^2 = 9 \neq 0$).

Como A^2 es invertible para todo m , la ecuación $A^2X = B$ tiene **solución única para cualquier valor real de m** .

b) En vez de calcular A^2 directamente (lo que obligaría a multiplicar matrices 3×3 y luego invertir), es más eficiente resolver la ecuación en dos pasos: llamamos $Y = AX$, de modo que $A^2X = A(AX) = AY = B$. Primero resolvemos $AY = B$, y después $AX = Y$.

Idea clave

Esta estrategia —resolver dos sistemas «sencillos» de 3×3 en cascada, en vez de uno solo con la matriz A^2 — suele ahorrar mucho cálculo cuando la ecuación tiene la forma $A^2X = B$ o $A^nX = B$.

Paso 1: resolver $AY = B$. El sistema es

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = m \\ my_2 + y_3 = 0 \\ 3y_2 = 9 \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $y_2 = 3$. Sustituyendo en la segunda: $3m + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -3m$. Sustituyendo $y_2 = 3$ en la primera: $y_1 + 6 = m \Rightarrow y_1 = m - 6$. Así, $Y = (m - 6, 3, -3m)$.

Paso 2: resolver $AX = Y$. El sistema es

$$\begin{cases} x + 2y = m - 6 \\ my + z = 3 \\ 3y = -3m \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $y = -m$. Sustituyendo en la segunda: $m(-m) + z = 3 \Rightarrow z = 3 + m^2$. Sustituyendo $y = -m$ en la primera: $x + 2(-m) = m - 6 \Rightarrow x = 3m - 6$.

La solución (única para cada m) es:

$$(x, y, z) = (3m - 6, -m, m^2 + 3).$$

PROBLEMA 2: Matrices no cuadradas e inversa (10 puntos)

ENUNCIADO

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

- Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)
- Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13} . (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Como A es 2×3 y B es 2×3 , para que AB^T tenga sentido trasponemos B : B^T es 3×2 , y AB^T resulta 2×2 (por lo que I debe ser la identidad 2×2).

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos AB^T fila por fila:

Fila 1 de A es $(1, 0, 1)$: $(1, 0, 1) \cdot \text{col.1 de } B^T = (1)(1) + (0)(1) + (1)(1) = 2$; $(1, 0, 1) \cdot \text{col.2 de } B^T = (1)(2) + (0)(-1) +$

$$(1)(0) = 2.$$

Fila 2 de A es $(0, 1, 1)$: $(0, 1, 1) \cdot \text{col.1} = (0)(1) + (1)(1) + (1)(1) = 2$; $(0, 1, 1) \cdot \text{col.2} = (0)(2) + (1)(-1) + (1)(0) = -1$.

$$AB^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sumamos la identidad 2×2 :

$$M = AB^T + I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su inversa mediante la fórmula directa para matrices 2×2 : si $M = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, entonces $M^{-1} = \frac{1}{ps - qr} \begin{pmatrix} s & -q \\ -r & p \end{pmatrix}$.

$$|M| = 3(0) - 2(2) = -4.$$

$$M^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

b) Calculamos $C^2 = C \cdot C$ multiplicando explícitamente:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + \alpha(-\alpha^2) & 0 \cdot \alpha + \alpha \cdot 0 \\ -\alpha^2 \cdot 0 + 0 \cdot (-\alpha^2) & -\alpha^2 \cdot \alpha + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix}.$$

Y efectivamente $\begin{pmatrix} -\alpha^3 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 \end{pmatrix} = -\alpha^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\alpha^3 I$, como se quería comprobar.

Idea clave

Como $C^2 = -\alpha^3 I$ es un múltiplo escalar de la identidad, todas las potencias pares de C son también múltiplos de I (y por tanto conmutan con cualquier matriz), lo que facilita mucho calcular $C^{13} = (C^2)^6 \cdot C$.

$$C^{12} = (C^2)^6 = (-\alpha^3 I)^6 = (-1)^6 (\alpha^3)^6 I = \alpha^{18} I,$$

ya que $(-1)^6 = 1$ al ser un exponente par. Por tanto:

$$C^{13} = C^{12} \cdot C = \alpha^{18} I \cdot C = \alpha^{18} C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{19} \\ -\alpha^{20} & 0 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 3: Recta definida por dos planos: paralelismo (10 puntos)

ENUNCIADO

Dada la recta $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0, 0, 3)$ y $Q = (2, 2, a)$, obtener:

- a) Los valores del parámetro real a , si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q . (6 puntos)

b) La ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P . (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Como r viene dada como intersección de los planos $x - y = 1$ (normal $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$) y $x + 2y + z = 0$ (normal $\vec{n}_2 = (1, 2, 1)$), un vector director de r es el producto vectorial de ambas normales:

$$\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada componente:

$$\vec{i} : (-1)(1) - (0)(2) = -1, \quad \vec{j} : -[(1)(1) - (0)(1)] = -1, \quad \vec{k} : (1)(2) - (-1)(1) = 3.$$

$$\vec{d}_r = (-1, -1, 3).$$

El vector director de la recta PQ es $\vec{PQ} = Q - P = (2, 2, a - 3)$.

Para que ambas rectas sean paralelas, $\vec{PQ}$ debe ser proporcional a $\vec{d}_r$: existe k tal que $(2, 2, a - 3) = k(-1, -1, 3)$.

Idea clave

Con las dos primeras componentes ya podemos determinar k , y la tercera nos dirá si existe un a consistente con ese mismo k .

De la primera componente: $2 = -k \Rightarrow k = -2$. Comprobamos con la segunda: $2 = -k = 2$ (coherente).

De la tercera: $a - 3 = 3k = 3(-2) = -6 \Rightarrow a = -3$.

El único valor es $a = -3$.

b) Un plano perpendicular a r tiene como vector normal la dirección de r , $\vec{d}_r = (-1, -1, 3)$. Imponiendo que pase por $P = (0, 0, 3)$:

$$-1(x - 0) - 1(y - 0) + 3(z - 3) = 0 \Rightarrow -x - y + 3z - 9 = 0, \quad \text{o bien} \quad x + y - 3z + 9 = 0.$$

PROBLEMA 4: Recta definida por dos planos: ángulo y proyección (10 puntos)

ENUNCIADO

Dada la recta $r : \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0, 5, 2)$, se pide:

- Comprobar que el punto $Q = (2, 6, 0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q . (2 puntos)
- Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s . (3 puntos)
- Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r . (5 puntos)

SOLUCIÓN

a) Comprobamos $Q = (2, 6, 0)$ en ambas ecuaciones de r :

$$5(2) + 6 + 7(0) = 10 + 6 = 16 \quad \checkmark, \quad 9(2) - 6 + 7(0) = 18 - 6 = 12 \quad \checkmark.$$

Efectivamente $Q \in r$. La recta s que pasa por $P = (0, 5, 2)$ y $Q = (2, 6, 0)$ tiene dirección $\vec{PQ} = Q - P = (2, 1, -2)$:

$$s : (x, y, z) = (0, 5, 2) + t(2, 1, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Un vector director de r se obtiene con el producto vectorial de las normales de los dos planos que la definen, $\vec{n}_1 = (5, 1, 7)$ y $\vec{n}_2 = (9, -1, 7)$:

$$\vec{d}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$\vec{i} : (1)(7) - (7)(-1) = 14,$$

$$\vec{j} : -[(5)(7) - (7)(9)] = -(35 - 63) = 28,$$

$$\vec{k} : (5)(-1) - (1)(9) = -14.$$

$$\vec{d}_r = (14, 28, -14) = 14(1, 2, -1).$$

Tomamos el vector simplificado $\vec{d}_r = (1, 2, -1)$. Con $\vec{d}_s = (2, 1, -2)$, aplicamos la fórmula del ángulo entre rectas:

$$\cos \theta = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| |\vec{d}_s|} = \frac{|(1)(2) + (2)(1) + (-1)(-2)|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{|2+2+2|}{\sqrt{6} \cdot 3} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35.26^\circ.$$

c) Para proyectar P ortogonalmente sobre r , usamos el punto conocido $Q \in r$ y la dirección $\vec{d}_r = (1, 2, -1)$. El pie de la perpendicular H es de la forma $H = Q + u\vec{d}_r$, donde u se determina exigiendo que $\vec{QH} \cdot \vec{d}_r = \vec{QP} \cdot \vec{d}_r / |\vec{d}_r|^2 \cdot |\vec{d}_r|^2 \dots$

Idea clave

Más simple: el parámetro u es la proyección escalar de $\vec{QP}$ sobre $\vec{d}_r$, es decir, $u = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{d}_r}{|\vec{d}_r|^2}$.

Calculamos $\vec{QP} = P - Q = (0 - 2, 5 - 6, 2 - 0) = (-2, -1, 2)$:

$$u = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{d}_r}{|\vec{d}_r|^2} = \frac{(-2)(1) + (-1)(2) + (2)(-1)}{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{-2 - 2 - 2}{6} = \frac{-6}{6} = -1.$$

La proyección es:

$$H = Q + u\vec{d}_r = (2, 6, 0) + (-1)(1, 2, -1) = (2 - 1, 6 - 2, 0 + 1) = (1, 4, 1).$$

Comprobamos que H pertenece a r : $5(1) + 4 + 7(1) = 5 + 4 + 7 = 16 \notin$; $9(1) - 4 + 7(1) = 9 - 4 + 7 = 12 \notin$.

PROBLEMA 5: Función con $1/x$ y $\ln$: dominio, extremos y área (10 puntos)

ENUNCIADO

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obtener:

- a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
- b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
- c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Necesitamos $x \neq 0$ (por el término $\frac{1}{x}$) y $x + 1 > 0$, es decir, $x > -1$ (por el logaritmo). Combinando ambas condiciones:

$$\text{Dom}(f) = (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

Estudiamos los límites en los puntos excluidos del dominio y en el infinito.

En $x = -1^+$: $\ln(x+1) \rightarrow -\infty$ y $\frac{1}{x} \rightarrow -1$ (finito), así que $f(x) \rightarrow -\infty$: asíntota vertical en $x = -1$.

En $x = 0^-$: $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ y $\ln(x+1) \rightarrow 0$, así que $f(x) \rightarrow -\infty$. En $x = 0^+$: $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, así que $f(x) \rightarrow +\infty$. Asíntota vertical en $x = 0$ (con comportamiento distinto a cada lado).

En $x \rightarrow +\infty$: $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ y $\ln(x+1) \rightarrow +\infty$ (aunque muy lentamente), así que $f(x) \rightarrow +\infty$; no hay asíntota horizontal ni oblicua (el logaritmo crece más lento que cualquier recta, pero no se estabiliza).

b) Derivamos:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-(x+1) + x^2}{x^2(x+1)} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2(x+1)}.$$

Igualamos el numerador a cero: $x^2 - x - 1 = 0$, cuyas soluciones son

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Esto da $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618$ (dentro de $(-1, 0)$) y $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (dentro de $(0, +\infty)$).

Idea clave

El denominador $x^2(x+1)$ es positivo en todo el dominio de f (ya que $x^2 > 0$ siempre que $x \neq 0$, y $x+1 > 0$ por estar en el dominio). Por tanto, el signo de f' coincide con el signo del numerador $x^2 - x - 1$, una parábola que abre hacia arriba: negativa entre sus raíces, positiva fuera de ellas.

En el tramo $(-1, 0)$: $f' > 0$ antes de x_1 y $f' < 0$ después (ya que $(-1, 0)$ está fuera y luego dentro del intervalo entre raíces al crecer x hacia 0). Concretamente, f es creciente en $(-1, x_1)$ y decreciente en $(x_1, 0)$: hay un **máximo relativo** en $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

En el tramo $(0, +\infty)$: f es decreciente en $(0, x_2)$ y creciente en $(x_2, +\infty)$: hay un **mínimo relativo** en $x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

c) Como $\frac{1}{x} > 0$ y $\ln(x+1) > 0$ para todo $x \geq 1$ (dentro del dominio considerado), la función f es positiva en todo $[1, 2]$: el área es directamente la integral, sin necesidad de valores absolutos.

Idea clave

Para integrar $\ln(x+1)$ usamos integración por partes: con $u = \ln(x+1)$, $dv = dx$, se obtiene $\int \ln(x+1) dx = (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + C$ (se puede comprobar derivando: la derivada de

$$(x+1)\ln(x+1) - (x+1) \text{ es } \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - 1 = \ln(x+1).$$

Una primitiva de f es:

$$F(x) = \ln x + (x+1)\ln(x+1) - (x+1).$$

Evalúamos en $x = 2$:

$$F(2) = \ln 2 + 3 \ln 3 - 3.$$

Evalúamos en $x = 1$:

$$F(1) = \ln 1 + 2 \ln 2 - 2 = 0 + 2 \ln 2 - 2.$$

El área es:

$$\text{Área} = F(2) - F(1) = (\ln 2 + 3 \ln 3 - 3) - (2 \ln 2 - 2) = 3 \ln 3 - \ln 2 - 1 \approx 1.6027 \text{ u}^2.$$

PROBLEMA 6: Puerta parabólica de área máxima (10 puntos)

ENUNCIADO

El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

- Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
- Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) Por la simetría de la parábola respecto al eje Y , situamos las esquinas superiores de la puerta en $(-x, -x^2 + 12)$ y $(x, -x^2 + 12)$, con $x > 0$, y las inferiores en $(-x, 0)$ y $(x, 0)$. La puerta tiene entonces:

$$\text{ancho} = 2x, \quad \text{altura} = -x^2 + 12.$$

El área de la puerta en función de x es:

$$A(x) = 2x(-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x, \quad 0 < x < 2\sqrt{3}$$

(el límite superior $2\sqrt{3}$ es donde la parábola corta al suelo: $-x^2 + 12 = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$, más allá del cual la altura sería negativa).

Derivamos e igualamos a cero:

$$A'(x) = -6x^2 + 24 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

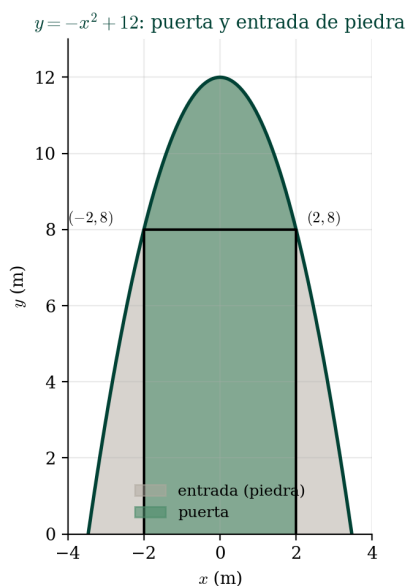
(descartamos $x = -2$ por estar fuera del dominio físico $x > 0$). Comprobamos que es un máximo con la segunda derivada:

$$A''(x) = -12x, \quad A''(2) = -24 < 0,$$

lo que confirma un máximo (y, al ser el único punto crítico en $(0, 2\sqrt{3})$, también el máximo absoluto en ese intervalo).

Las dimensiones de la puerta son:

$$\text{ancho} = 2(2) = 4 \text{ m}, \quad \text{altura} = -(2)^2 + 12 = 8 \text{ m}.$$



b) El área de la puerta es directamente:

$$A_{\text{puerta}} = 4 \times 8 = 32 \text{ m}^2.$$

Para el área total de la entrada (toda la región bajo la parábola, hasta donde toca el suelo), integramos $y = -x^2 + 12$ entre sus dos raíces, $x = \pm 2\sqrt{3}$. Por simetría, calculamos el doble de la integral entre 0 y $2\sqrt{3}$:

$$A_{\text{entrada}} = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (-x^2 + 12) dx = 2 \int_0^{2\sqrt{3}} (-x^2 + 12) dx = 2 \left[-\frac{x^3}{3} + 12x \right]_0^{2\sqrt{3}}.$$

Calculamos $(2\sqrt{3})^3 = 8 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$, así que $-\frac{24\sqrt{3}}{3} = -8\sqrt{3}$. Y $12 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$. Sumando:

$$A_{\text{entrada}} = 2[-8\sqrt{3} + 24\sqrt{3}] = 2 \cdot 16\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \approx 55.43 \text{ m}^2.$$

El área recubierta de piedra es el resto:

$$A_{\text{piedra}} = A_{\text{entrada}} - A_{\text{puerta}} = 32\sqrt{3} - 32 \approx 23.43 \text{ m}^2.$$

PROBLEMA 7: Dos monedas: relanzamiento condicionado (10 puntos)

ENUNCIADO

Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2 . La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y .

- Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
- Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos

obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

SOLUCIÓN

a) Los dos lanzamientos son independientes (monedas distintas). Denotamos $C_1 = \text{«}M_1 \text{ da cara}\text{»}$ ($P(C_1) = x$) y $C_2 = \text{«}M_2 \text{ da cara}\text{»}$ ($P(C_2) = y$).

$$P(0 \text{ caras}) = P(\overline{C_1})P(\overline{C_2}) = (1-x)(1-y).$$

$$P(2 \text{ caras}) = P(C_1)P(C_2) = xy.$$

$$P(1 \text{ cara}) = P(C_1)P(\overline{C_2}) + P(\overline{C_1})P(C_2) = x(1-y) + (1-x)y.$$

b) Cada moneda que salió cruz en la primera tirada se vuelve a lanzar (una sola vez más), con la misma probabilidad de cara que le corresponde. Calculamos primero la probabilidad de que **cada moneda, individualmente**, acabe mostrando cara *al final del proceso completo* (ya sea a la primera o a la segunda tirada).

Idea clave

Para la moneda M_1 : acaba en cara si sale cara a la primera (prob. x), o si sale cruz a la primera y luego cara al repetir (prob. $(1-x) \cdot x$). Estos dos caminos son incompatibles entre sí, así que sus probabilidades se suman.

$$X' = P(M_1 \text{ acaba en cara}) = x + (1-x)x = x[1 + (1-x)] = x(2-x) = 2x - x^2.$$

Del mismo modo, para M_2 : $Y' = 2y - y^2$.

Idea clave

Es más cómodo trabajar con el complementario: $1 - X' = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$, y análogamente $1 - Y' = (1-y)^2$. Esto tiene sentido: para que M_1 acabe en **cruz**, tiene que fallar (cruz) las **dos** veces que se lanza, con probabilidad $(1-x)$ cada vez, de ahí el cuadrado.

Con X' y Y' jugando el mismo papel que x, y en el apartado a), pero para el proceso completo:

$$P(0 \text{ caras final}) = (1 - X')(1 - Y') = (1-x)^2(1-y)^2.$$

$$P(2 \text{ caras final}) = X'Y' = [x(2-x)][y(2-y)] = xy(2-x)(2-y).$$

$$P(1 \text{ cara final}) = 1 - P(0 \text{ caras final}) - P(2 \text{ caras final}) = 1 - (1-x)^2(1-y)^2 - xy(2-x)(2-y).$$

PROBLEMA 8: Probabilidad: vuelos según procedencia (10 puntos)

ENUNCIADO

Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de países de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5 % de los vuelos con procedencia nacional, el 4 % de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25 % del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)

- b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

SOLUCIÓN

Denotamos N , UE , F los sucesos «procede del territorio nacional / de la Unión Europea / de fuera de la UE», con

$$P(N) = \frac{95}{161}, \quad P(UE) = \frac{50}{161}, \quad P(F) = \frac{16}{161}.$$

Y R = «el vuelo se retrasa», con $P(R | N) = 0.05$, $P(R | UE) = 0.04$, $P(R | F) = 0.0625$.

- a) Por el teorema de la probabilidad total (N , UE , F forman una partición de todos los vuelos):

$$P(R) = P(N)P(R | N) + P(UE)P(R | UE) + P(F)P(R | F).$$

Calculamos cada producto en número de vuelos retrasados (más cómodo que trabajar con las fracciones 95/161 directamente):

$$95 \times 0.05 = 4.75, \quad 50 \times 0.04 = 2, \quad 16 \times 0.0625 = 1.$$

Sumando: $4.75 + 2 + 1 = 7.75$ vuelos retrasados de media, sobre un total de 161:

$$P(R) = \frac{7.75}{161} = \frac{31}{644} \approx 0.0481.$$

Idea clave

Trabajar con el número de vuelos (en vez de con las probabilidades $P(N) = 95/161$, etc.) evita manejar fracciones feas en cada paso, y al final basta dividir por el total.

- b) Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(UE | R) = \frac{P(UE)P(R | UE)}{P(R)} = \frac{50 \times 0.04}{7.75} = \frac{2}{7.75} = \frac{8}{31} \approx 0.2581.$$