

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 2

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Sigui $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada d'una funció $f(x)$.
- a) Si sabem que $f(x)$ talla l'eix de les abscisses en $x = 1$, calculeu l'expressió de la funció $f(x)$.
[0,75 punts]

- b) Calculeu l'abscissa del punt d'inflexió de $f(x)$ i estudieu la concavitat de la funció.
[0,75 punts]

- c) Sabem que l'àrea del recinte limitat per la corba $y=f''(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x=0$ i $x=a$, amb $a > 2$, és $15u^2$. Calculeu el valor de a .
[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	a	
	b	
	c	
	Total	

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a :

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

- a)** Discuti el sistema per als diferents valors del paràmetre a .

[1,5 punts]

- b)** Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $a = 2$.
[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	a	
	b	
	Total	

3. Segui la recta r definida per l'expressió següent:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

a) Determineu la posició relativa de la recta r respecte al pla $\pi: x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si és paral·lela, calculeu la distància de r a π , i si és secant, calculeu el punt de tall.

[1,25 punts]

- b)** Calculeu l'equació de la recta s perpendicular al pla π i que talla la recta r en un punt P , la primera coordenada del qual és 5 vegades més gran que la segona.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	a	
	b	
	Total	

4. **a)** Trobeu una funció polinòmica $y = g(x)$ de grau 3 tal que talli l'eix de les ordenades en el punt $(0, 5)$, que la recta tangent a $y = g(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ sigui horitzontal i que $g''(x) = 2x + 1$.
[1 punt]

- b)** Comproveu que la funció $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ té una arrel a $x = 2$ i que és estrictament creixent a l'interval $(0, 4)$. Utilitzeu aquesta informació per a calcular l'àrea determinada per la funció $f(x)$, l'eix de les abscisses i les rectes $x = 0$ i $x = 4$.

[1,5 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

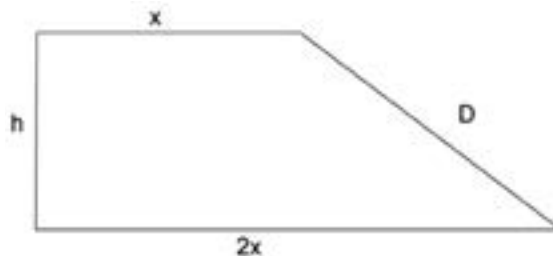
5. Sigui la matriu $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depèn dels paràmetres a , b i c .

a) Calculeu les matrius X tals que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,5 punts]

- b)** Determineu els valors de a , b i c perquè la matriu inversa de X sigui $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	a	
	b	
	Total	

6. Al pati d'una escola es vol crear una àrea de joc de 30 m^2 per als més petits en forma de trapezi rectangular, de manera que la base més gran mesuri el doble que la base més petita, tal com mostra la figura, i que el costat oblic respecte a les bases (D) sigui tan curt com sigui possible.



- a) Justifiqueu que se satisfan les relacions següents: $h = \frac{20}{x}$ i $D(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.
[1 punt]

- b)** Trobeu les dimensions del trapezi per a les quals la longitud del costat D és mínima.
[1,5 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	a	
	b	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'alumne/a



Institut
d'Estudis
Catalans

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 5

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responen a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Siguin les matrius $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $C^3 = I_2$, en què I_2 és la matriu identitat d'ordre 2, i deduiu que la matriu C és invertible i que $C^{-1} = C^2$. Calculeu C^{2022} .

[1,5 punts]

b) Resoleu l'equació matricial $C \cdot X = A - 2I_2$.

[1 punt]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

2. Considereu la funció $f(x) = x^3$ i sigui a un nombre real estrictament positiu.
- a)** Calculeu l'equació de la recta t tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = a$. Trobeu el punt de tall de la recta t amb l'eix de les abscisses (en funció de a).
- [1,25 punts]

- b)** Feu un esbós de la gràfica de la funció f i la recta t . Calculeu el valor de a perquè l'àrea en el primer quadrant limitada per la funció f , la recta t i l'eix de les abscisses sigui $108 u^2$.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	a	
	b	
	Total	

3. Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3 - m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{array} \right\},$$

en què m és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre m .

[1,25 punts]

- b)** Resoleu el sistema, si és possible, quan $m = 0$ i quan $m = 3$. En cada cas, doneu la posició relativa dels tres plans a $\mathbb{R}^3$.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

4. A $\mathbb{R}^2$, considereu els triangles rectangles que tenen els vèrtexs en els punts $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ i $B = (0, y)$, amb $x > 0$ i $y > 0$, i en què la suma dels catets és 10.
- a)** Expresseu l'àrea del triangle AOB en funció de x . Per a quin valor de x l'àrea del triangle AOB és la més gran possible? Quin valor té aquesta àrea màxima?
- [1,25 punts]

- b)** Expresseu la hipotenusa del triangle AOB en funció de x . Per a quin valor de x la hipotenusa del triangle AOB és la més petita possible? Quin és aquest valor mínim?
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	a	
	b	
	Total	

5. Siguin els punts $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ i $D = (1, 0, 1)$.
- a)** Comproveu que tres d'aquests punts estan alineats. Determineu quins són els tres punts i calculeu l'equació contínua i l'equació paramètrica de la recta que defineixen.
- [1,25 punts]

- b)** Calculeu l'equació general o cartesiana del pla que determinen els quatre punts.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

6. La columna de l'esquerra de la taula següent mostra l'esquema d'un programa informàtic que s'ha elaborat per a trobar solucions aproximades d'una equació $f(x) = 0$ en un interval (a, b) , sabent que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la dreta recull un exemple de funcionament del programa en què es pot veure com actuaria per trobar una solució de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0,5$ i $b = 2$.

<i>Esquema del programa</i>	<i>Exemple</i>																														
1. Escriure «Introduïu un valor a »	L'usuari introdueix $a = 0,5$																														
2. Escriure «Introduïu un valor b »	L'usuari introdueix $b = 2$																														
3. Escriure «Introduïu una funció $f(x)$ »	L'usuari introdueix $f(x) = x + \ln(x)$																														
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la mitjana entre a i b i li assigna el nom $c = (0,5 + 2)/2 = 1,25$																														
5. Si $f(a) \cdot f(c) < 0$, aleshores reassignar $b = c$; en cas contrari, reassignar $a = c$	El programa comprova que $f(0,5) \cdot f(1,25) = (0,5 + \ln(0,5)) \cdot (1,25 + \ln(1,25)) < 0$; per tant, reassigna $b = 1,25$																														
6. Repetir els passos 4 i 5 tants cops com faci falta fins que $f(a) - f(b) < 0,00000001$	El programa va repetint la comprovació anterior, canviant cada vegada els valors de a o de b: <table><tr><td></td><td>a</td><td>b</td></tr><tr><td>inici</td><td>0,5</td><td>2</td></tr><tr><td>iteració 1</td><td>0,5</td><td>1,25</td></tr><tr><td>iteració 2</td><td>0,5</td><td>0,875</td></tr><tr><td>iteració 3</td><td>0,5</td><td>0,6875</td></tr><tr><td>iteració 4</td><td>0,5</td><td>0,59375</td></tr><tr><td>iteració 5</td><td>0,546875</td><td>0,59375</td></tr><tr><td>iteració 6</td><td>0,546875</td><td>0,5703125</td></tr><tr><td>iteració 7</td><td>0,55859375</td><td>0,5703125</td></tr><tr><td>[...]</td><td></td><td></td></tr></table>		a	b	inici	0,5	2	iteració 1	0,5	1,25	iteració 2	0,5	0,875	iteració 3	0,5	0,6875	iteració 4	0,5	0,59375	iteració 5	0,546875	0,59375	iteració 6	0,546875	0,5703125	iteració 7	0,55859375	0,5703125	[...]		
	a	b																													
inici	0,5	2																													
iteració 1	0,5	1,25																													
iteració 2	0,5	0,875																													
iteració 3	0,5	0,6875																													
iteració 4	0,5	0,59375																													
iteració 5	0,546875	0,59375																													
iteració 6	0,546875	0,5703125																													
iteració 7	0,55859375	0,5703125																													
[...]																															
7. Quan $f(a) - f(b) < 0,00000001$, escriure: «La solució de l'equació és c » i aturar el programa	Després d'unes 30 iteracions, el programa escriu: «La solució de l'equació és 0,56714329»																														

- a) Expliqueu per què aquest programa és capaç de trobar una solució aproximada de l'equació $x + \ln(x) = 0$ entre els valors $a = 0,5$ i $b = 2$.

[1,25 punts]

- b)** Volem aplicar aquest programa per a trobar les tres arrels de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ amb valors de a i b diferents. Trobeu justificadament entre quins valors a i b , per a cada arrel, hem d'aplicar el programa per a trobar aproximacions de cadascuna de les tres arrels de la funció.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	a	
	b	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'alumne/a



Institut
d'Estudis
Catalans