

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad Valenciana -- Ordinaria 2024

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Formato de este examen: elige 4 problemas de los 8 propuestos. Cada problema puntúa hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio es la suma de las calificaciones de los 4 problemas elegidos, dividida entre 4 y aproximada a las centésimas.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Idea clave

Este examen (Junio 2024) usa el formato **anterior** de la Comunidad Valenciana: 8 problemas independientes de los que solo se responden 4, en vez de las 4 preguntas con opción A/B de los exámenes más recientes. Aquí resolvemos **los 8**, como recurso de repaso completo.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PROBLEMA 1: Sistema con parámetro (10 puntos)**ENUNCIADO**

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m :

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}.$$

Se pide:

- Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m . (6 puntos)
- Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

SOLUCIÓN

a) La matriz de coeficientes es

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante desarrollando por cofactores a lo largo de la primera fila:

$$|M| = -1 \begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & m \\ m-1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada uno de los tres determinantes 2×2 :

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = m(-1) - (-1)(3) = -m + 3,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m-1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - (-1)(m-1) = -2 + m - 1 = m - 3,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & m \\ m-1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - m(m-1) = 6 - m^2 + m.$$

Sustituyendo:

$$|M| = -1(-m+3) - 1(m-3) + (6-m^2+m) = (m-3) - (m-3) + 6 - m^2 + m = -m^2 + m + 6.$$

Factorizamos: $-m^2 + m + 6 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m+2) = 0$, así que

$$|M| = -(m-3)(m+2).$$

Idea clave

Los dos primeros determinantes 2×2 han dado resultados opuestos ($-m+3$ y $m-3 = -(-m+3)$): al sustituir en la fórmula se cancelan entre sí. Esto no es casualidad aquí, pero conviene comprobarlo igual sin dar por hecho cancelaciones.

Si $m \neq 3$ y $m \neq -2$: $|M| \neq 0$, luego $\text{rg}(M) = \text{rg}(M') = 3 = n$ (número de incógnitas). El sistema es **compatible determinado (SCD)**.

Si $m = -2$: sustituyendo, el sistema queda

$$\begin{cases} -x + y + z = -2 \\ 2x - 2y - z = -6 \\ -3x + 3y - z = 4 \end{cases}.$$

De la primera ecuación, $x = y + z + 2$. Sustituyendo en la segunda:

$$2(y + z + 2) - 2y - z = -6 \implies 2y + 2z + 4 - 2y - z = -6 \implies z = -10.$$

Sustituyendo el mismo $x = y + z + 2$ en la tercera ecuación:

$$-3(y + z + 2) + 3y - z = 4 \implies -3y - 3z - 6 + 3y - z = 4 \implies -4z = 10 \implies z = -\frac{5}{2}.$$

Hemos obtenido **dos valores distintos para z** (-10 y $-\frac{5}{2}$) a partir de dos ecuaciones diferentes: es una contradicción. El sistema es **incompatible (SI)** para $m = -2$.

Si $m = 3$: sustituyendo, la segunda y la tercera ecuación son

$$(2^a) \quad 2x + 3y - z = 9, \quad (3^a) \quad (3-1)x + 3y - z = 6 + 3 \implies 2x + 3y - z = 9.$$

Idea clave

¡Las ecuaciones 2^a y 3^a son literalmente idénticas cuando $m = 3$! Esto significa que, en realidad, solo tenemos 2 ecuaciones independientes para 3 incógnitas: es la forma más directa de ver que el sistema es compatible indeterminado, sin necesidad de calcular rangos por menores.

Por tanto $rg(M) = rg(M') = 2 < 3 = n$: el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**, con un grado de libertad.

b) Resolvemos el sistema para $m = 3$ usando la primera ecuación y la ecuación (repetida) $2x + 3y - z = 9$:

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{cases}$$

De la primera, $x = y + z - 3$. Sustituyendo en la segunda:

$$2(y + z - 3) + 3y - z = 9 \implies 2y + 2z - 6 + 3y - z = 9 \implies 5y + z = 15 \implies y = \frac{15 - z}{5} = 3 - \frac{z}{5}.$$

Y entonces:

$$x = y + z - 3 = \left(3 - \frac{z}{5}\right) + z - 3 = z - \frac{z}{5} = \frac{4z}{5}.$$

Tomando $z \in \mathbb{R}$ como parámetro libre, la solución general es:

$$(x, y, z) = \left(\frac{4z}{5}, 3 - \frac{z}{5}, z\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

PROBLEMA 2: Matrices y rango (10 puntos)**ENUNCIADO**

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Estudiar el rango de A en función del parámetro real m . (3 puntos)
- Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. (4 puntos)
- Para $m = 0$, calcular A^5 . (3 puntos)

SOLUCIÓN

a) Calculamos $|A|$ desarrollando por la segunda fila, que solo tiene un elemento no nulo (m , en la posición central):

$$|A| = m \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix} = m(1 \cdot m - m \cdot m) = m(m - m^2) = m^2(1 - m).$$

Así, $|A| = 0 \Leftrightarrow m = 0$ o $m = 1$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$: $|A| \neq 0$, así que $rg(A) = 3$.

Si $m = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. El menor formado por las filas 1 y 3 y las columnas 1 y 2 es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$,

luego $rg(A) \geq 2$; y como $|A| = 0$, no puede ser 3. Por tanto $rg(A) = 2$.

Si $m = 1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. El menor de las filas 1,2 y columnas 1,2 es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego $\text{rg}(A) \geq 2$; y como $|A| = 0$ en $m = 1$, se concluye $\text{rg}(A) = 2$.

b) Para $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = m^2(1 - m)$ en $m = -1$ da $|A| = (-1)^2(1 - (-1)) = 1 \cdot 2 = 2 \neq 0$, la matriz es invertible y $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Idea clave

Antes de multiplicar nada, conviene calcular la inversa completa mediante la matriz adjunta: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)^T$, donde cada entrada de la matriz de cofactores es $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (siendo M_{ij} el menor que se obtiene al tachar la fila i y la columna j).

Calculamos los 9 cofactores de A :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, & C_{12} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, & C_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ C_{21} &= -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, & C_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2, & C_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & C_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & C_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

La matriz de cofactores es $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y la adjunta es su traspuesta:

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = 2$:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Comprobación rápida: la fila 2 de A^{-1} es $(0, -1, 0)$, y la fila 2 de A es $(0, -1, 0)$. Si multiplicamos fila 2 de A^{-1} por columna 2 de A : $0 \cdot (-2) + (-1)(-1) + 0 \cdot 1 = 1$, y por columna 1: $0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$. Este tipo de comprobaciones parciales ayuda a detectar errores de cálculo antes de seguir.

Ahora calculamos $X = A^{-1}B$, multiplicando columna a columna:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primera columna de $X = A^{-1}$ por $(1, 0, 0)^T$ = primera columna de $A^{-1} = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)^T$.

Segunda columna de $X = A^{-1}$ por $(0, 1, 0)^T$ = segunda columna de $A^{-1} = \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)^T$.

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Para $m = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Calculamos $A^2 = A \cdot A$ explícitamente, fila por fila (cada fila de A^2 es la fila correspondiente de A multiplicada por toda la matriz A):

$$\text{Fila 1 de } A^2 = (1, 0, 0) \cdot A = 1 \cdot (\text{fila 1 de } A) = (1, 0, 0).$$

$$\text{Fila 2 de } A^2 = (0, 0, 0) \cdot A = (0, 0, 0).$$

$$\text{Fila 3 de } A^2 = (0, 1, 0) \cdot A = 1 \cdot (\text{fila 2 de } A) = (0, 0, 0).$$

Así:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Repitiendo el mismo procedimiento para $A^3 = A^2 \cdot A$: la fila 1 de A^2 es $(1, 0, 0)$, que multiplicada por A vuelve a dar $(1, 0, 0)$; las filas 2 y 3 de A^2 son nulas, y se mantienen nulas. Por tanto $A^3 = A^2$, y lo mismo ocurre en cada potencia siguiente:

$$A^2 = A^3 = A^4 = A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 3: Recta, plano y distancia con parámetro (10 puntos)

ENUNCIADO

Se considera la recta $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi : 3x - my + z = 1$. Se pide:

- Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r . (4 puntos)
- Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π , que contenga a la recta r . (3 puntos)

- c) Calcular, en función de m , la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$. (3 puntos)

SOLUCIÓN

De la ecuación continua de r leemos directamente su vector director, $\vec{d}_r = (2, 3, -1)$ (los denominadores), y un punto de la recta: haciendo el parámetro igual a 0 en cada fracción, $x = 1$, $y = -1$, $z = -2$, es decir, el punto $(1, -1, -2)$ —que resulta ser justamente el punto P del apartado c). El vector normal de π es $\vec{n}_\pi = (3, -m, 1)$.

a) Que r y π sean paralelos (o que π contenga a r) exige, en ambos casos, que la recta no «atraviese» el plano, es decir, que $\vec{d}_r$ sea perpendicular a $\vec{n}_\pi$:

$$\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi = 2(3) + 3(-m) + (-1)(1) = 6 - 3m - 1 = 5 - 3m.$$

Igualando a cero: $5 - 3m = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$. Este es el único valor de m para el que r y π pueden ser paralelos o coincidentes (fuera de él, la recta corta al plano en un solo punto).

Para distinguir si, en $m = \frac{5}{3}$, el plano *contiene* a r (en vez de ser solo paralelo y disjunto), comprobamos si el punto de r pertenece a π . Sustituyendo $(1, -1, -2)$ en $\pi : 3x - my + z - 1 = 0$, con m genérico:

$$3(1) - m(-1) + (-2) - 1 = 3 + m - 2 - 1 = m.$$

Esta expresión se anula únicamente cuando $m = 0$.

Idea clave

Tenemos entonces dos condiciones distintas: el paralelismo exige $m = \frac{5}{3}$, y que el punto de r esté en π exige $m = 0$. Como **ambas condiciones deben cumplirse a la vez** para que π contenga a r , y $\frac{5}{3} \neq 0$, no hay ningún valor de m que las satisfaga simultáneamente.

Por tanto: r y π son paralelos (estrictamente, sin puntos comunes) para $m = \frac{5}{3}$, y **no existe ningún valor de m** para el que π contenga a r .

b) Buscamos un plano paralelo a $\pi_{m=5/3}$ (mismo vector normal, $\vec{n} = (3, -\frac{5}{3}, 1)$, o su múltiplo entero $(9, -5, 3)$ tras multiplicar por 3) que sí contenga a r ; para ello, basta imponer que pase por el punto de r , $(1, -1, -2)$:

$$9(x - 1) - 5(y + 1) + 3(z + 2) = 0 \Rightarrow 9x - 9 - 5y - 5 + 3z + 6 = 0 \Rightarrow 9x - 5y + 3z - 8 = 0.$$

Idea clave

Podemos comprobar que este plano es efectivamente paralelo a $\pi_{m=5/3}$: multiplicando $\pi_{m=5/3} : 3x - \frac{5}{3}y + z = 1$ por 3 obtenemos $9x - 5y + 3z = 3$, que tiene el mismo vector normal $(9, -5, 3)$ que nuestro plano nuevo ($9x - 5y + 3z = 8$), pero distinto término independiente ($3 \neq 8$): son paralelos y distintos, como se pedía.

c) Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano, con $\pi : 3x - my + z - 1 = 0$ y $P = (1, -1, -2)$:

$$d(P, \pi) = \frac{|3(1) - m(-1) + (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}} = \frac{|3 + m - 2 - 1|}{\sqrt{9 + m^2 + 1}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}.$$

PROBLEMA 4: Vértices de un rectángulo en el espacio (10 puntos)**ENUNCIADO**

Un rectángulo tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2, 1, 3)$ y $Q = (1, 3, 1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4, 7, 6)$.

- Calcular la ecuación de la recta r . (2 puntos)
- Calcular la ecuación del plano que contiene al rectángulo. (3 puntos)
- Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

SOLUCIÓN

a) Como P, Q son vértices consecutivos, PQ es un lado del rectángulo:

$$\vec{PQ} = Q - P = (1 - 2, 3 - 1, 1 - 3) = (-1, 2, -2), \quad |\vec{PQ}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

El lado opuesto (que contiene a los otros dos vértices) es necesariamente **paralelo** a PQ , ya que en cualquier rectángulo los lados opuestos son paralelos. Como además r pasa por $R = (4, 7, 6)$:

$$r : (x, y, z) = (4, 7, 6) + t(-1, 2, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) El rectángulo es una figura plana, y su plano contiene a P , a Q y a toda la recta r (en particular, al punto R). Tomamos como vectores directores del plano $\vec{PQ} = (-1, 2, -2)$ y $\vec{PR} = R - P = (2, 6, 3)$, y calculamos su producto vectorial para obtener el vector normal:

$$\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 3 - (-2) \cdot 6)\vec{i} - ((-1) \cdot 3 - (-2) \cdot 2)\vec{j} + ((-1) \cdot 6 - 2 \cdot 2)\vec{k}.$$

Calculamos cada componente:

$$2 \cdot 3 - (-2) \cdot 6 = 6 + 12 = 18, \quad (-1) \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = -3 + 4 = 1, \quad (-1) \cdot 6 - 2 \cdot 2 = -6 - 4 = -10.$$

$$\vec{n} = (18, -1, -10).$$

Imponiendo que el plano pase por $P(2, 1, 3)$:

$$18(x - 2) - 1(y - 1) - 10(z - 3) = 0 \implies 18x - 36 - y + 1 - 10z + 30 = 0 \implies 18x - y - 10z - 5 = 0.$$

Comprobamos con $Q(1, 3, 1)$: $18(1) - 3 - 10(1) - 5 = 18 - 3 - 10 - 5 = 0$. Y con $R(4, 7, 6)$: $18(4) - 7 - 10(6) - 5 = 72 - 7 - 60 - 5 = 0$.

c) A diferencia de un cuadrado, en un rectángulo el lado PS (adyacente a P) **no tiene que medir lo mismo que PQ** : solo tiene que ser **perpendicular** a él. Por tanto, S es sencillamente el pie de la perpendicular trazada desde P hasta la recta r .

Parametrizamos un punto genérico de r como $S = (4 - t, 7 + 2t, 6 - 2t)$, y calculamos

$$\vec{PS} = S - P = (4 - t - 2, 7 + 2t - 1, 6 - 2t - 3) = (2 - t, 6 + 2t, 3 - 2t).$$

Imponemos $\vec{PS} \cdot \vec{PQ} = 0$:

$$(2-t)(-1) + (6+2t)(2) + (3-2t)(-2) = (-2+t) + (12+4t) + (-6+4t) = 9t+4.$$

Igualando a cero: $9t+4=0 \Rightarrow t = -\frac{4}{9}$. Sustituyendo en la parametrización de r :

$$S = \left(4 + \frac{4}{9}, 7 - \frac{8}{9}, 6 + \frac{8}{9}\right) = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right).$$

Idea clave

El cuarto vértice T (adyacente a Q) se obtiene trasladando Q por el mismo vector $\vec{PS}$, ya que en un rectángulo $\vec{QT} = \vec{PS}$ (lados opuestos PS y QT iguales y paralelos).

$$\vec{PS} = S - P = \left(\frac{40}{9} - 2, \frac{55}{9} - 1, \frac{62}{9} - 3\right) = \left(\frac{22}{9}, \frac{46}{9}, \frac{35}{9}\right).$$

$$T = Q + \vec{PS} = \left(1 + \frac{22}{9}, 3 + \frac{46}{9}, 1 + \frac{35}{9}\right) = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right).$$

Los otros dos vértices son

$$S = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right), \quad T = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right),$$

con $|PS| = |QT| = |\vec{PS}| = \sqrt{\left(\frac{22}{9}\right)^2 + \left(\frac{46}{9}\right)^2 + \left(\frac{35}{9}\right)^2} = \frac{5\sqrt{17}}{3}$ (distinto de $PQ = 3$, como corresponde a un rectángulo no cuadrado).

PROBLEMA 5: Función con parámetro: dominio, asíntotas y Bolzano (10 puntos)

ENUNCIADO

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$, donde k es un parámetro real. Se pide:

- Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)
- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)
- Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$. (2 puntos)

SOLUCIÓN

a) El denominador e^{2x} es una exponencial, que nunca se anula (siempre $e^{2x} > 0$), así que f está definida para todo x : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, y no hay asíntotas verticales.

Estudiamos los límites en el infinito. Escribiendo $f(x) = kx e^{-2x}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} kx e^{-2x} = 0,$$

porque la exponencial decreciente e^{-2x} tiende a 0 mucho más rápido de lo que kx crece (es un límite del tipo « $\infty \cdot 0$ » que se resuelve, por ejemplo, con la regla de L'Hôpital sobre $\frac{kx}{e^{2x}}$, o recordando que toda

exponencial domina a cualquier polinomio). Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} kx e^{-2x} : \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty, e^{-2x} \rightarrow +\infty \text{ (muy rápido), y } x \rightarrow -\infty,$$

así que el producto diverge a $-\infty$ (si $k > 0$) o a $+\infty$ (si $k < 0$): no hay asíntota horizontal por ese lado, la función se dispara.

b) Derivamos $f(x) = kx e^{-2x}$ aplicando la regla del producto, $(uv)' = u'v + uv'$, con $u = kx$ (luego $u' = k$) y $v = e^{-2x}$ (luego $v' = -2e^{-2x}$):

$$f'(x) = k \cdot e^{-2x} + kx \cdot (-2e^{-2x}) = k e^{-2x} (1 - 2x).$$

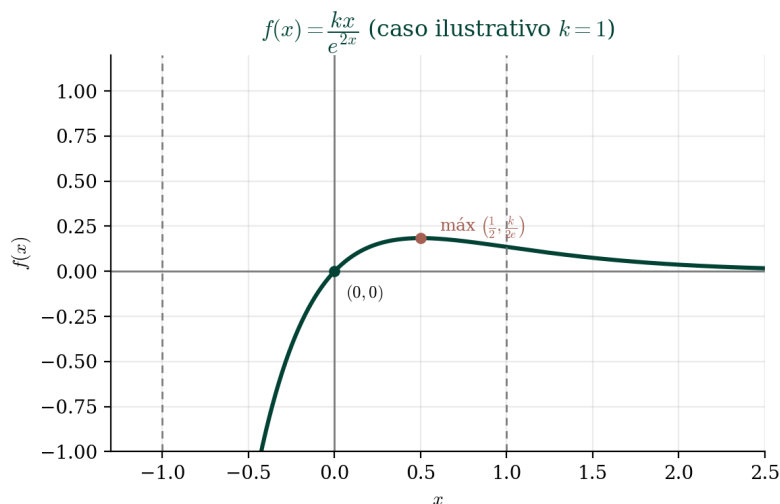
Como $e^{-2x} > 0$ para todo x , el signo de $f'(x)$ coincide con el signo de $k(1 - 2x)$, que se anula únicamente en $x = \frac{1}{2}$.

Si $k > 0$: para $x < \frac{1}{2}$, $(1 - 2x) > 0$, luego $f'(x) > 0$ (creciente); para $x > \frac{1}{2}$, $f'(x) < 0$ (decreciente). Se trata de un **máximo** en $x = \frac{1}{2}$.

Si $k < 0$: los signos de f' se invierten respecto al caso anterior: decreciente en $(-\infty, \frac{1}{2})$ y creciente en $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Se trata de un **mínimo** en $x = \frac{1}{2}$.

En ambos casos, el valor del extremo es

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{k}{2e}.$$



c) Evaluamos la función en los extremos del intervalo $[-1, 1]$:

$$f(-1) = k(-1)e^{-2(-1)} = -k e^2, \quad f(1) = k(1)e^{-2(1)} = \frac{k}{e^2}.$$

Multiplicamos ambos valores:

$$f(-1) \cdot f(1) = (-k e^2) \left(\frac{k}{e^2} \right) = -k^2 \cdot \frac{e^2}{e^2} = -k^2.$$

Como $-k^2 \leq 0$ para cualquier valor real de k (y $-k^2 < 0$ siempre que $k \neq 0$), esto significa que $f(-1)$ y $f(1)$ tienen **signos opuestos** (o alguno de los dos es cero).

Idea clave

f es continua en todo $\mathbb{R}$ (es producto y composición de un polinomio y una exponencial, ambas continuas). El **teorema de Bolzano** dice que si una función continua en un intervalo cerrado toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces se anula en algún punto interior. Eso es exactamente lo que hemos comprobado.

Por tanto, existe al menos un punto $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$, para cualquier valor de k . (De hecho, si $k \neq 0$, ese cero es exactamente $x = 0$, ya que $f(x) = kx e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$; pero el argumento de Bolzano es el que pide el enunciado, y tiene la ventaja de no necesitar resolver la ecuación.)

PROBLEMA 6: Área entre una parábola y una recta horizontal (10 puntos)**ENUNCIADO**

Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, 1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, con $0 < a < 1$, contenidas dentro de R . Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R .

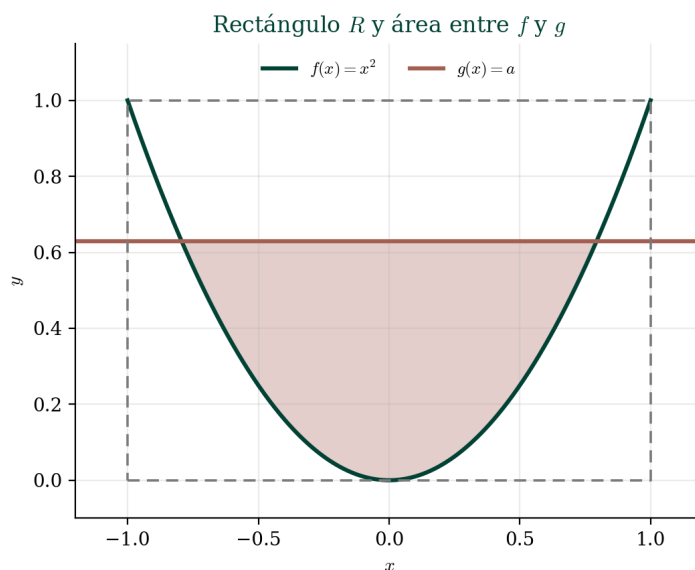
SOLUCIÓN

El rectángulo R tiene base 2 (de $x = -1$ a $x = 1$) y altura 1, así que su área es $2 \times 1 = 2$. Buscamos, por tanto, que el área entre las curvas valga $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$.

Hallamos primero dónde se cortan $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$:

$$x^2 = a \implies x = \pm\sqrt{a}.$$

En el tramo $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$, la recta horizontal $g(x) = a$ queda por **encima** de la parábola $f(x) = x^2$ (basta comprobarlo en $x = 0$: $g(0) = a > 0 = f(0)$).



El área entre las curvas es la integral de (función superior – función inferior):

$$\text{Área}(a) = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}.$$

Evaluamos en cada extremo. En $x = \sqrt{a}$: $a\sqrt{a} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$. En $x = -\sqrt{a}$ (la función $ax - \frac{x^3}{3}$ es impar en x , así que su valor es el opuesto): $-\frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

Restando:

$$\text{Área}(a) = \frac{2a\sqrt{a}}{3} - \left(-\frac{2a\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3} a^{3/2}.$$

Imponemos que esta área sea $\frac{2}{3}$:

$$\frac{4}{3} a^{3/2} = \frac{2}{3} \implies a^{3/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \implies a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

(Elevamos al cuadrado ambos lados para eliminar el exponente $3/2$, ya que $(a^{3/2})^2 = a^3$.) Por tanto:

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Idea clave

Para presentar $\sqrt[3]{1/4}$ de forma más limpia: $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, y multiplicando numerador y denominador por $\sqrt[3]{2}$ (para que $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$ sea racional): $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

$$a = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \approx 0.63,$$

que efectivamente cumple $0 < a < 1$, como exigía el enunciado.

PROBLEMA 7: Probabilidad con dos monedas (10 puntos)

ENUNCIADO

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2 . La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro; la probabilidad de obtener cara con M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

- Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.
 - ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
 - ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)
- Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces, observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea M_1 . Responder a la misma pregunta para M_2 . (4 puntos)

SOLUCIÓN

En cada elección, $P(M_1) = P(M_2) = \frac{1}{2}$ (moneda elegida al azar entre dos). Las probabilidades de cara son $P(\text{cara} \mid M_1) = 0.6$ y $P(\text{cara} \mid M_2) = 1$ (siempre sale cara).

a) Como la moneda se devuelve a la bolsa después de cada lanzamiento, los tres lanzamientos son independientes y **cada uno tiene la misma distribución**. Calculamos primero la probabilidad de cara en un solo lanzamiento cualquiera, usando el teorema de la probabilidad total (las dos monedas forman una partición del espacio de posibilidades):

$$P(\text{cara}) = P(M_1) \cdot P(\text{cara} | M_1) + P(M_2) \cdot P(\text{cara} | M_2) = \frac{1}{2}(0.6) + \frac{1}{2}(1) = 0.3 + 0.5 = 0.8 = \frac{4}{5}.$$

Idea clave

Al ser los tres lanzamientos independientes e idénticos, con probabilidad de cara $p = \frac{4}{5}$ en cada uno, el número de caras en los 3 lanzamientos sigue una distribución binomial $X \sim B(3, \frac{4}{5})$.

a.1) Probabilidad de exactamente 3 caras (de 3 lanzamientos):

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^0 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125} = 0.512.$$

a.2) Probabilidad de exactamente 1 cruz (equivalentemente, exactamente 2 caras):

$$P(1 \text{ cruz}) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{16}{25} = \frac{48}{125} = 0.384.$$

b) Ahora la misma moneda se lanza dos veces (no se devuelve entre los dos lanzamientos). Sea $2C$ el suceso «se observan 2 caras». Calculamos primero las probabilidades condicionadas:

$$P(2C | M_1) = 0.6 \times 0.6 = 0.36, \quad P(2C | M_2) = 1 \times 1 = 1.$$

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(2C) = P(M_1)P(2C | M_1) + P(M_2)P(2C | M_2) = \frac{1}{2}(0.36) + \frac{1}{2}(1) = 0.18 + 0.5 = 0.68 = \frac{17}{25}.$$

Aplicamos el teorema de Bayes para cada moneda:

$$P(M_1 | 2C) = \frac{P(M_1)P(2C | M_1)}{P(2C)} = \frac{0.5 \times 0.36}{0.68} = \frac{0.18}{0.68} = \frac{18}{68} = \frac{9}{34} \approx 0.2647.$$

$$P(M_2 | 2C) = \frac{P(M_2)P(2C | M_2)}{P(2C)} = \frac{0.5 \times 1}{0.68} = \frac{0.5}{0.68} = \frac{50}{68} = \frac{25}{34} \approx 0.7353.$$

Idea clave

Comprobación: $P(M_1 | 2C) + P(M_2 | 2C) = \frac{9}{34} + \frac{25}{34} = \frac{34}{34} = 1$. Esto debe cumplirse siempre, ya que, sabiendo que salieron 2 caras, la moneda elegida tiene que haber sido necesariamente M_1 o M_2 (no hay otras opciones).

PROBLEMA 8: Ventas telefónicas: distribución binomial (10 puntos)

ENUNCIADO

Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30 % de sus llamadas no consigue una venta. Este co-

mercial realiza 10 llamadas.

- a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)
- b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)
- c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

SOLUCIÓN

Como el 30 % de las llamadas fallan, el 70 % consiguen venta. Sea X = número de ventas en las 10 llamadas; como cada llamada es un ensayo independiente con la misma probabilidad de éxito, $X \sim B(10, 0.7)$.

Idea clave

La tabla de la distribución binomial adjunta solo incluye columnas hasta $p = 0.50$. Como aquí $p = 0.7 > 0.5$, conviene trabajar con la variable complementaria Y = número de fracasos (llamadas sin venta) en las mismas 10 llamadas. Como cada llamada falla con probabilidad 0.3 (sí está en la tabla) y $Y = 10 - X$, tenemos $Y \sim B(10, 0.3)$. Cada suceso sobre X se traduce en un suceso sobre Y usando $Y = 10 - X$.

a) «Más de 7 ventas» significa $X \geq 8$, es decir, $X \in \{8, 9, 10\}$. Traduciendo a $Y = 10 - X$: $X \geq 8 \Leftrightarrow Y \leq 2$. Por tanto:

$$P(X > 7) = P(X \geq 8) = P(Y \leq 2) = F_Y(2).$$

Leyendo la tabla en la fila $n = 10$, columna $p = 0.30$:

$$P(X > 7) = F_Y(2) = 0.3828.$$

b) «Al menos 5 ventas» significa $X \geq 5$. Traduciendo: $X \geq 5 \Leftrightarrow 10 - Y \geq 5 \Leftrightarrow Y \leq 5$. Por tanto:

$$P(X \geq 5) = P(Y \leq 5) = F_Y(5).$$

Leyendo la tabla:

$$P(X \geq 5) = F_Y(5) = 0.9527.$$

c) «Entre 3 y 8 ventas» significa $3 \leq X \leq 8$. Traduciendo con $Y = 10 - X$: si $X = 3$, $Y = 7$; si $X = 8$, $Y = 2$. Como X crece cuando Y decrece, la desigualdad se invierte:

$$3 \leq X \leq 8 \Leftrightarrow 2 \leq Y \leq 7.$$

$$P(3 \leq X \leq 8) = P(2 \leq Y \leq 7) = F_Y(7) - F_Y(1).$$

Idea clave

Restamos $F_Y(1)$ (no $F_Y(2)$) porque queremos *incluir* $Y = 2$ en el resultado: $P(2 \leq Y \leq 7) = P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1)$, ya que $P(Y \leq 1)$ es exactamente lo que hay que descontar de $P(Y \leq 7)$ para quedarnos solo con $Y \in \{2, \dots, 7\}$.

Leyendo la tabla ($n = 10$, $p = 0.30$): $F_Y(7) = 0.9984$ y $F_Y(1) = 0.1493$. Por tanto:

$$P(3 \leq X \leq 8) = 0.9984 - 0.1493 = 0.8491.$$