

Prueba de Acceso a la Universidad

Comunidad de Madrid -- Extraordinaria 2022

Matemáticas II

Baremo e instrucciones

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las **ocho** que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Calificación: la valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Tiempo: 90 minutos.

Idea clave

Mismo formato que los exámenes anteriores de esta serie: resolvemos las ocho preguntas (A.1–A.4 y B.1–B.4).

PREGUNTA A.1: Sistemas de ecuaciones: problema de libros (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

SOLUCIÓN

Llamamos x , y , z al número de ensayos, novelas y biografías, respectivamente.

Idea clave

Como siempre, cada frase del enunciado se traduce en una ecuación antes de resolver nada.

Primera condición. “Tres de cada dieciséis libros son ensayos”:

$$\frac{3}{16}(x + y + z) = x.$$

Segunda condición. “Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas”:

$$z + \frac{x}{3} = y + 2.$$

Tercera condición. “Retirando la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían 105”:

$$\left(x - \frac{x}{2}\right) + \left(y - \frac{y}{5}\right) + z = 105 \implies \frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + z = 105.$$

El sistema a resolver es

$$\begin{cases} \frac{3}{16}(x + y + z) = x \\ z + \frac{x}{3} = y + 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{4y}{5} + z = 105. \end{cases}$$

De la primera ecuación: $3(x + y + z) = 16x \Rightarrow 3y + 3z = 13x \Rightarrow z = \frac{13x - 3y}{3}$.

Sustituyendo en la segunda: $\frac{13x - 3y}{3} + \frac{x}{3} = y + 2 \Rightarrow \frac{14x - 3y}{3} = y + 2 \Rightarrow 14x - 3y = 3y + 6 \Rightarrow 14x - 6y = 6 \Rightarrow 7x - 3y = 3$.

De aquí, $y = \frac{7x - 3}{3}$.

Sustituyendo y y z (en función de x) en la tercera ecuación:

$$z = \frac{13x - 3y}{3} = \frac{13x - (7x - 3)}{3} = \frac{6x + 3}{3} = 2x + 1.$$

$$\frac{x}{2} + \frac{4}{5} \left(\frac{7x - 3}{3} \right) + (2x + 1) = 105.$$

Multiplicando todo por 30 (m.c.m. de 2, 15, 1):

$$15x + 8(7x - 3) + 30(2x + 1) = 3150 \Rightarrow 15x + 56x - 24 + 60x + 30 = 3150 \Rightarrow 131x + 6 = 3150.$$

$$131x = 3144 \Rightarrow x = 24.$$

Con $x = 24$: $y = \frac{7(24) - 3}{3} = \frac{165}{3} = 55$; $z = 2(24) + 1 = 49$.

Comprobación: $\frac{3}{16}(24 + 55 + 49) = \frac{3}{16}(128) = 24$ ✓; $49 + \frac{24}{3} = 49 + 8 = 57 = 55 + 2$ ✓; $12 + \frac{4}{5}(55) + 49 = 12 + 44 + 49 = 105$ ✓.

Hay 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

PREGUNTA A.2: Análisis: continuidad, asíntotas y extremos (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

a (0.75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b (0.25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

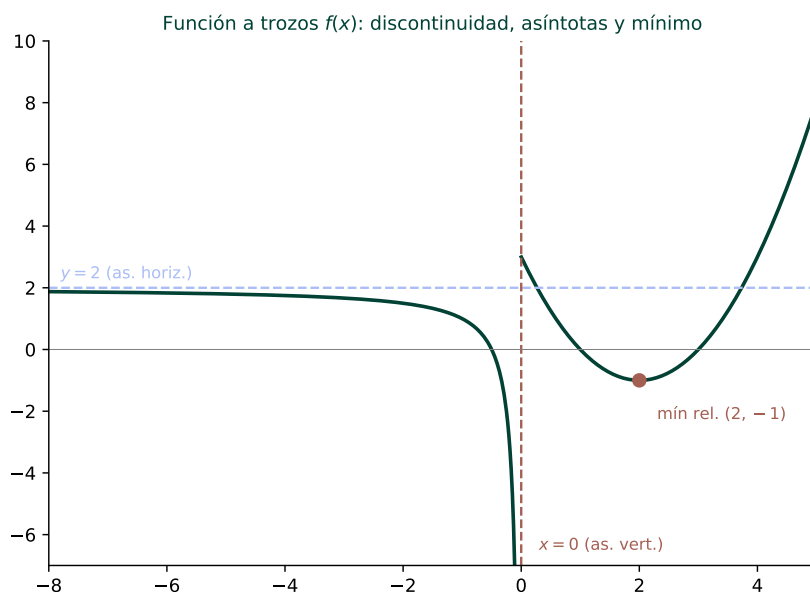
SOLUCIÓN

Figura 1: $f(x)$: discontinuidad en $x = 0$, asíntotas y mínimo relativo en $(2, -1)$.

Apartado a)

En $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$, f es continua por ser, respectivamente, un cociente de polinomios con denominador no nulo y un polinomio.

Idea clave

El único punto delicado es $x = 0$, donde cambia la definición de f : hay que estudiar el límite lateral por la izquierda, ya que $f(0)$ se calcula con la otra rama.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Como este límite lateral no es finito, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

f no es continua en $x = 0$ (aunque $f(0) = 0 - 0 + 3 = 3$ sí está definido). En cualquier otro punto, f es continua.

Apartado b)

f no es derivable en $x = 0$, ya que la derivabilidad exige continuidad, y hemos visto que f no es continua en ese punto.

Apartado c)

Asíntotas horizontales. Cuando $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = x^2 - 4x + 3 \rightarrow +\infty$, así que no hay asíntota horizontal por la derecha.

Cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2.$$

La recta $y = 2$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

Asíntota vertical. Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x} = -\infty$ (calculado en el apartado a):

La recta $x = 0$ es asíntota vertical.

Apartado d)

Para $x > 0$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$, con $f'(x) = 2x - 4$.

$$f'(x) = 0 \implies x = 2.$$

$$f(2) = 4 - 8 + 3 = -1.$$

El punto es $(2, -1)$, y como $f'(2) = 0$, la recta tangente ahí es horizontal:

La recta tangente es $y = -1$.

Idea clave

Para clasificar el punto, basta estudiar el signo de $f'(x) = 2x - 4$ a ambos lados de $x = 2$, dentro del dominio $x > 0$.

Como $f'(x) < 0$ en $(0, 2)$ y $f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$, f pasa de decreciente a creciente en $x = 2$:

En $(2, -1)$, f alcanza un mínimo relativo.

PREGUNTA A.3: Geometría del espacio: cuadrados en un plano (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ pertenecientes al plano π .

a (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π , encuentre los posibles puntos C y D .

b (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π , determine los otros dos vértices del mismo.

SOLUCIÓN

Apartado a)

El lado AB mide $|AB| = 2$ (ambos están sobre el eje Y). Como el cuadrado está en $\pi \equiv z = x$, cualquier punto del cuadrado tiene sus coordenadas x y z iguales.

Idea clave

Los vértices C y D , contiguos a B y A respectivamente, deben estar a distancia 2 de ellos, con un lado perpendicular a AB (que es paralelo al eje Y) y contenido en π : por eso su coordenada y coincide con la de B y A , y su desplazamiento ocurre en la dirección $(1, 0, 1)$ (dentro de π , perpendicular al eje Y).

Los puntos C y D tienen la forma $C = (a, 1, a)$ y $D = (a, -1, a)$ (misma y que B y A respectivamente, con $x = z = a$ por estar en π).

Imponemos que $|AD| = |BC| = 2$ (los otros dos lados del cuadrado):

$$|AD|^2 = a^2 + 0^2 + a^2 = 2a^2 = 4 \implies a^2 = 2 \implies a = \pm\sqrt{2}.$$

Hay dos cuadrados posibles:

$$D(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}), C(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}) \quad \text{o} \quad D(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}), C(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}).$$

Apartado b)

Si A y B son vértices opuestos (una diagonal), los otros dos vértices C, D están sobre la recta r_1 que pasa por el punto medio de AB (el origen O), es perpendicular a AB , y está contenida en π .

Idea clave

La dirección de r_1 debe ser perpendicular a la de AB (que es $(0, 1, 0)$) y estar en π (es decir, tener sus componentes x, z iguales): esto dos condiciones fijan su dirección salvo escala.

Sea $\vec{v}_1 = (a, b, a)$ (componentes x, z iguales por estar en π) la dirección de r_1 . Imponemos perpendicularidad con $\vec{v} = (0, 1, 0)$ (dirección de AB):

$$\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = b = 0.$$

Así, $\vec{v}_1 = (a, 0, a)$; tomamos $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$:

$$r_1 \equiv (x, y, z) = (\lambda, 0, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como en un cuadrado las dos diagonales tienen la misma longitud y se cortan en su punto medio, $|OC| = |OD| = |OA| = |OB| = 1$:

$$\|(\lambda, 0, \lambda)\| = \sqrt{2\lambda^2} = |\lambda|\sqrt{2} = 1 \implies \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Los otros dos vértices son $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

PREGUNTA A.4: Probabilidad: binomial y aproximación normal (2.5 puntos)

ENUNCIADO

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

SOLUCIÓN

Sea X el número de alumnos (de los elegidos) matriculados en Matemáticas II, con probabilidad de éxito $p = \frac{3}{5} = 0.6$.

Apartado a)

Con $n = 6$: $X \sim B(6, 0.6)$.

$$P(X = 4) = \binom{6}{4}(0.6)^4(0.4)^2 \approx 0.31104.$$

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.311.

Apartado b)

Idea clave

“Alguno matriculado” es el complementario de “ninguno matriculado” ($X = 0$).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.4)^6 \approx 1 - 0.004096 = 0.995904.$$

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.9959.

Apartado c)

Con $n = 120$: $Y \sim B(120, 0.6)$. Aproximamos por una normal:

$$\mu = np = 120(0.6) = 72, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120(0.6)(0.4)} = \sqrt{28.8} \approx 5.37.$$

Buscamos $P(Y > 60)$, aplicando la corrección por continuidad:

$$P(Y > 60) \approx P(Y' \geq 60.5) = P\left(Z \geq \frac{60.5 - 72}{5.37}\right) = P(Z \geq -2.14).$$

Por simetría: $P(Z \geq -2.14) = P(Z \leq 2.14) = 0.9838$.

La probabilidad pedida es, aproximadamente, 0.9838.

PREGUNTA B.1: Matrices con parámetro (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Se consideran las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB . Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$.

b (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k .

c (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA .

SOLUCIÓN

Apartado a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}.$$

$$\det(AB) = k(k-1) - 2k = k^2 - 3k = k(k-3).$$

AB tiene inversa si $k \neq 0$ y $k \neq 3$.

Para $k = 1$: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $\det = -2$.

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{I}.$

Apartado b)

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Antes de calcular el rango caso por caso, conviene buscar relaciones entre las filas: aquí, la suma de la primera y la segunda fila da exactamente el doble de la tercera, así que el rango nunca puede ser 3.

Comprobamos: $\text{fila}_1 + \text{fila}_2 = (2, -2, 2k) = 2 \cdot \text{fila}_3$. Por tanto, $\text{rg}(BA) \leq 2$ para cualquier valor de k .

Además, las filas 1 y 2 son linealmente independientes entre sí para cualquier k (no son proporcionales, ya que sus segundas componentes son 0 y -2 , de proporción distinta a la de las primeras componentes salvo casos degenerados que no ocurren aquí).

El rango de BA es siempre 2, para cualquier valor de k .

Apartado c)

Para $k = 1$:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Idea clave

Como $\text{fila}_1 + \text{fila}_2 = 2 \cdot \text{fila}_3$ en la matriz de coeficientes, un sistema con esta matriz es compatible únicamente si sus términos independientes cumplen la misma relación ($b_1 + b_2 = 2b_3$). Basta elegir un término independiente que *no* cumpla esta relación para obtener un sistema incompatible.

Por ejemplo, con términos independientes $(1, -1, 1)$: $1 + (-1) = 0 \neq 2(1) = 2$, así que el sistema es incompatible.

Un sistema incompatible válido es:

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ -2y + 2z = -1 \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

PREGUNTA B.2: Análisis: continuidad, monotonía e integral (2.5 puntos)

ENUNCIADO

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

a (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$, así como los máximos y mínimos relativos.

c (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x) dx$.

SOLUCIÓN

Apartado a)

Idea clave

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ es una indeterminación del tipo $0 \cdot (-\infty)$: la reescribimos como cociente para aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ también, y $f(0) = 0$: **f es continua en $x = 0$.**

Para la derivabilidad: $f'(x) = 1$ para $x < 0$, así que $f'(0^-) = 1$. Para $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$, y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1) = -\infty.$$

f no es derivable en $x = 0$ (las derivadas laterales no coinciden; de hecho, la derivada por la derecha ni siquiera es finita).

Apartado b)

En $(-\infty, 0)$: $f'(x) = 1 > 0$, así que **f es creciente en $(-\infty, 0)$.**

En $(0, +\infty)$: $f'(x) = \ln x + 1$, que se anula en $\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$.

Idea clave

Como $\ln x$ es creciente, $f'(x) = \ln x + 1$ también lo es: por tanto, basta con localizar el único cero de f' para saber que es negativa antes y positiva después.

$$f'(x) < 0 \text{ en } (0, e^{-1}) \text{ y } f'(x) > 0 \text{ en } (e^{-1}, +\infty).$$

Resumen de monotonía: creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, e^{-1})$, creciente en $(e^{-1}, +\infty)$.

Como f pasa de creciente a decreciente en $x = 0$: **máximo relativo en $x = 0$** (valor $f(0) = 0$).

Como f pasa de decreciente a creciente en $x = e^{-1}$: **mínimo relativo en $x = e^{-1}$** (valor $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) = -e^{-1}$).

Apartado c)

Como el intervalo $[1, 2]$ está en la región $x > 0$, usamos $f(x) = x \ln x$. Integramos por partes con $u = \ln x$, $dv = x dx$, de donde $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{x^2}{2}$:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = (2 \ln 2 - 1) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

El valor de la integral es $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

PREGUNTA B.3: Geometría del espacio: rectas paralelas (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

$$\text{Sean las rectas } r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y } s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t. \end{cases}$$

a (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.

b (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s .

c (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s , respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z = 0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q .

SOLUCIÓN**Idea clave**

r está dada como intersección de dos planos; para obtener su dirección y un punto, la parametrizamos tomando $z = t$ como parámetro y despejando x , y .

De $y - 2z + 1 = 0 \Rightarrow y = 2t - 1$; de $x + y + 2 = 0 \Rightarrow x = -y - 2 = -2t - 1$:

$$r \equiv (x, y, z) = (-2t - 1, 2t - 1, t), \quad \vec{d}_r = (-2, 2, 1).$$

La recta s tiene dirección $\vec{d}_s = (-2, 2, 1)$ (directamente de su parametrización).

Apartado a)

Como $\vec{d}_r = \vec{d}_s = (-2, 2, 1)$, **las rectas son paralelas** (o coincidentes).

Idea clave

Para descartar que sean coincidentes, basta comprobar que un punto de una no pertenece a la otra.

Tomamos $A(-1, -1, 0) \in r$ (con $t = 0$) y $B(2, 5, 0) \in s$ (con $t = 0$). Como $A \neq B$ y no son coincidentes (puede comprobarse que $A \notin s$), son **estrictamente paralelas**.

La distancia entre ellas es la distancia de A a la recta s :

$$\overrightarrow{AB} = (3, 6, 0).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{d}_s = (3, 6, 0) \times (-2, 2, 1) = (6 \cdot 1 - 0 \cdot 2, 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 1, 3 \cdot 2 - 6 \cdot (-2)) = (6, -3, 18).$$

$$d(r, s) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \vec{d}_s\|}{\|\vec{d}_s\|} = \frac{\sqrt{36 + 9 + 324}}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{369}}{3} = \sqrt{41}.$$

Las rectas son paralelas y la distancia entre ellas es $\sqrt{41}$.

Apartado b)

Idea clave

Como las rectas son paralelas (coplanarias), el plano que las contiene queda determinado por un punto de una de ellas y dos vectores directores: el vector director común y el vector que une un punto de cada recta.

El plano π pasa por $A(-1, -1, 0)$ y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB} = (3, 6, 0)$ y $\vec{d}_s = (-2, 2, 1)$. Su normal es (ya calculada arriba, salvo factor 3): $\vec{n} = (2, -1, 6)$.

$$2(x + 1) - 1(y + 1) + 6(z - 0) = 0 \implies 2x - y + 6z + 1 = 0.$$

El plano buscado es $\pi : 2x - y + 6z + 1 = 0$.

Apartado c)

Los puntos con $z = 0$ son, precisamente, $P = A = (-1, -1, 0) \in r$ y $Q = B = (2, 5, 0) \in s$ (los mismos puntos usados arriba, ya que ambos tenían $z = 0$ con $t = 0$).

La recta por P y Q tiene dirección $\overrightarrow{PQ} = (3, 6, 0)$:

La recta buscada es $(x, y, z) = (-1 + 3t, -1 + 6t, 0), t \in \mathbb{R}$.

PREGUNTA B.4: Probabilidad: productos y exportación (2.5 puntos)**ENUNCIADO**

Una empresa comercializa tres tipos de productos A , B y C . Cuatro de cada siete productos son de tipo A , dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C . A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A , un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C . Elegido un producto al azar, se pide:

a (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

b (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

SOLUCIÓN

$$P(A) = \frac{4}{7}, \quad P(B) = \frac{2}{7}, \quad P(C) = 1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}.$$

Denotamos E = “el producto se destina a la exportación”, con

$$P(E | A) = 0.4, \quad P(E | B) = 0.6, \quad P(E | C) = 0.2.$$

Apartado a)

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(E) = P(A)P(E | A) + P(B)P(E | B) + P(C)P(E | C) = \frac{4}{7}(0.4) + \frac{2}{7}(0.6) + \frac{1}{7}(0.2).$$

$$P(E) = \frac{1.6}{7} + \frac{1.2}{7} + \frac{0.2}{7} = \frac{3}{7}.$$

$$P(E) = \frac{3}{7}.$$

Apartado b)

Por el teorema de Bayes:

$$P(C | E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{P(C)P(E | C)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{7}(0.2)}{\frac{3}{7}} = \frac{0.2}{3} = \frac{1}{15}.$$

$$P(C | E) = \frac{1}{15}.$$